Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/12/08.

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Début du sujet A noté sur 15.

EXERCICE 1 : calcul.

1. Donnez le résultat sous forme d'une seule expression fractionnaire. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\frac{x}{7} - \frac{x}{2}$. b) $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$. c) $\frac{x}{6} \times \frac{2x}{7}$. d) $\frac{\frac{2}{x}}{\frac{2x}{5}}$.

   a) $-\frac{5x}{14}$. b) $\frac{x^2+2}{2x}$. c) $\frac{x^2}{21}$. d) $\frac{5}{x^2}$.

2. Donnez le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers les plus petits possibles : par exemple $\sqrt{68} = \sqrt{2^2 \times 17} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\sqrt{81}$. b) $\sqrt{48}$. c) $\sqrt{3} \times \sqrt{33}$. d) $\sqrt{a^2 b}$.

   a) 9. b) $4\sqrt{3}$. c) $3\sqrt{11}$. d) $|a|\sqrt{b}$.

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $A = a^2 \times a^{12} \times a^{-5}$. b) $B = \frac{a^{34} \times a^{-22}}{(a^{12})^2}$.

a) $A = a^9$.
b) $B = a^{-12}$.

4. Développez les expressions suivantes.

a) $M(x) = -2(x+3)$.
b) $N(x) = 6(7x-8)$.
c) $P(x) = (8x+2)(6x-9)$.
d) $Q(x) = (2x+1)^2$.
e) $R(x) = 6(x-7)(5x-4)$.
f) $S(x) = -(8x-7)(x+2)^2$.

a) $M(x) = -2x-6$.
b) $N(x) = 42x-48$.
c) $P(x) = 48x^2-60x-18$.
d) $Q(x) = 4x^2+4x+1$.
e) $R(x) = 30x^2-234x+168$.
f) $S(x) = -8x^3-25x^2-4x+28$.

5. Factorisez les expressions suivantes.

a) $T(x) = 3x^{14}+x^2+3x$.
b) $U(x) = x^2-4x+4$.
c) $V(x) = x^2-38$.
d) $W(x) = (x^2-9)-(x+3)$.

a) $T(x) = x(x^{13}+x+3)$.
b) $U(x) = (x-2)^2$.
c) $V(x) = (x-\sqrt{38})(x+\sqrt{38})$.
d) $W(x) = (x+3)(x-4)$.

EXERCICE 2 : résolution d'équations.

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x.

a) $5x+12 = 7$.
b) $(x-3)(5x-2) = 0$.
c) $x^2-4x = -4$.
d) $\dfrac{120x}{\pi} = 0$.

Les ensembles de solutions sont :

a) $\{-1\}$.
b) $\left\{3; \frac{2}{5}\right\}$.
c) $\{-2; 2\}$.
d) $\{0\}$.

EXERCICE 3 : fonctions.

1. Donnez *sans aucune justification* le tableau de signe des fonctions suivantes.

   a) $g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

   b) $g_2 : x \mapsto 5x + 1$.

   c) $g_3 : x \mapsto (x-1)(3x+60)$.

   d) $g_4 : x \mapsto \dfrac{x+12}{x-8}$.

a)

x	$-\infty$		$+\infty$
g_1		$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
g_2		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-20		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+60$		$-$	0	$+$		$+$	
g_3		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		-12		8		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
g_4		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

2. Déterminez les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans vous préoccuper du domaine de dérivabilité, mais en justifiant si nécessaire.
   Aucune présentation particulière de la fonction dérivée n'est attendue.

   a) $f_1 : x \mapsto \sin(x)$.
   b) $f_2 : x \mapsto 4x^2 - 5x - 134$.
   c) $f_3 : x \mapsto x^{12}\ln(x)$.
   d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$.

   a) $\cos(x)$.
   b) $8x - 5$.
   c) $12x^{11}\ln(x) + x^{11}$.
   d) $-\frac{5}{(x-3)^2}$.

EXERCICE 4 : étude d'une fonction.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 36x$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Justifiez la dérivabilité de f puis justifiez que $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

   f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

   $$f'(x) = 3x^2 - 12 \times x + 0 = 3x^2 - 24x + 36$$

   (b) Déterminez les zéros de f'. *Il s'agit donc de trouver les solutions de l'équation* $f'(x) = 0$.

   f' et une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 36$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 = 144$.
   $\Delta > 0$ donc f' admet deux racines réelles distinctes :
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-(-24)-\sqrt{144}}{2\times 3} = 2$.
   $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-(-24)+\sqrt{144}}{2\times 3} = 6$.

   L'ensemble des zéros de f' est $\{2; 6\}$.

   (c) Déduisez-en le signe de f'.

   Le trinôme est du signe de son coefficient ($a = 3$) dominant sauf entre ses éventuelles racines donc :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) Déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

f est polynomiale donc $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^3$ donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

(e) Calculez $f(2)$ et $f(6)$.

$f(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 36 \times 2$

$$\boxed{f(2) = 32.}$$

$f(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 36 \times 6.$

$$\boxed{f(6) = 0.}$$

(f) Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	32 $\searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite $y = -12x + 64$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Or :

* $a = 4$,

* $f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$,
* $f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$,

donc :

$$T : \; y = -12 \times (x - 4) + 16.$$

$$\boxed{T : \; y = -12x + 64.}$$

(b) Démontrez que $f(x) - (-12x + 64) = (x - 4)^3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'une part

$$\begin{aligned} f(x) - (-12x + 64) &= x^3 + 12x^2 + 36x + 12x - 64 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (x-4)^3 &= x^3 - 3 \times x^2 \times 4 + 3 \times x \times 4^2 - 4^3 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$

donc, par transitivité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) - (-12x + 64) = (x - 4)^3.}$$

(c) Déduisez-en la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T au point A.

$(x - 4)^3$ est du signe de $x - 4$ car la fonction cube est strictement croissante et s'annule en 0.
D'où :

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } T \text{ sur } [4, +\infty[\text{ et en dessous sinon.}}$$

(d) On admet que $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

Démontrez que la droite d, d'équation cartésienne $6x + \frac{1}{2}y + 13 = 0$, est parallèle à T.

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Vérifions que les vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$
Les vecteurs directeurs sont colinéaires donc

$$\boxed{T \parallel d.}$$

3. Tracez la courbe représentative de f ainsi que la tangente T dans le repère de l'**annexe A**.

Début du sujet B noté sur 20.

EXERCICE 5 : limites de suites.

Donnez sans aucune justification les limites (en $+\infty$) des suites suivantes définies par leur terme général.

a) $n^8 - 3n^2 + 7$.

b) $\dfrac{-n^3 + n - 2}{n^5 - 1}$.

c) $\dfrac{-2n^5 + 3n^3 + n}{7n^5 + 4n + 3}$.

d) $n^4 e^{-n} + \dfrac{2^n}{n!}$.

a) $n^8 - 3n^2 + 7 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) $\frac{-n^3+n-2}{n^5-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $\frac{-2n^5+3n^3+n}{7n^5+4n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{2}{7}$.

d) $n^4 e^{-n} + \frac{2^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

PROBLÈME 1 : probabilité.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

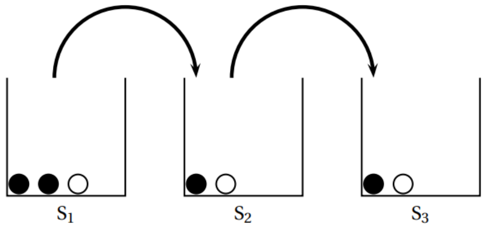
On imagine des sacs de jetons S_1, S_2, ..., S_n, ...

Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

— Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1,

— Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,
— Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ... ainsi de suite, ...



Pour tout entier naturel non nul k, on note E_k l'évènement : « le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E_k}$ l'évènement contraire.
Nous noterons p_k la probabilité de E_k : $p_k = \mathbb{P}(E_k)$.

1. Dans cette question on s'intéresse au tirage du premier jeton qu'on considère comme une expérience aléatoire à par entière.

   (a) Quel espace univers est-il pertinent d'associer à ce premier tirage ?

   Il semble pertinent, au vu des notations de l'énoncé de choisir

   $$\boxed{\Omega = \{E_1, \overline{E_1}\}.}$$

   La modélisation n'est jamais unique il est possible de numéroter les deux boules noires et de choisir $\Omega = \{N_1, N_2, B\}$. Cette dernière modélisation a l'avantage d'assurer l'équiprobabilité des issues.

   (b) Justifiez que la probabilité de tirer un jeton noir de la première urne est $\mathbb{P}(\overline{E_1}) = \frac{2}{3}$.

   Il y a équiprobabilité du tirage des trois billes or l'événement tirer une boule noire est réalisé par deux boules donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{3}.}$$

   Remarquons que nous avons utiliser la modélisation par une loi uniforme discrète pour calculer la probabilité.

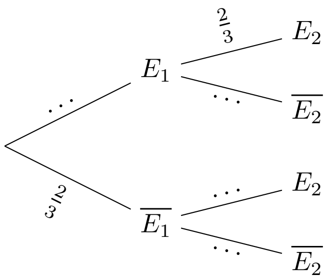
(c) Déduisez-en la probabilité d'obtenir un jeton blanc.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{E_1}) \\ &= 1 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

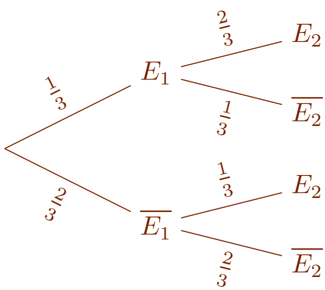
$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \tfrac{1}{3}.}$$

2. Dans cette question on s'intéresse au tirages des deux premiers jetons, tirages qu'on considère comme une expérience aléatoire à par entière.

   (a) Reproduisez et complétez l'arbre pondéré suivant :



Pour compléter l'arbre on utilise le fait que la somme des probabilités sur un embranchement égale 1, et aussi le fait que si le premier tirage donne une boule noir S_2 contient deux boules noires et une boule blanche.



(b) Décrivez par une phrase les événements : E_2, $E_1 \cap E_2$ et $E_1 \cup \overline{E_2}$.

E_2 : « la deuxième boule tirée est blanche ».
$E_1 \cap E_2$: « les deux premières boules tirées sont blanches ».
$E_1 \cup \overline{E_2}$: « la première boule tirée est blanche ou la seconde est noire ».

(c) Donnez sans justification $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2|E_1)$.

$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{2}{3}$.

(d) En vous appuyant sur l'arbre, et sans faire référence à des formules, calculez la probabilité d'obtenir successivement une boule blanche au premier tirage puis une boule noire au second.

Calculons $\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2})$.

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{1}{9}$.

(e) En vous appuyant sur l'arbre, et sans faire référence à des formules, calculez la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage.

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$$\mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(E_2) = \frac{4}{9}$.

(f) Un observateur de l'expérience n'a pas vu le premier tirage mais il voit que le second tirage donne une boule blanche.

Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été noire ? Vous préciserez la formule utilisée.

Calculons $\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2)$.

$\{E_1, \overline{E_1}\}$ est un système complet d'événement de probabilités non nulles, donc, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(E_2|\overline{E_1})}{\mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(E_2|\overline{E_1}) + \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2|E_1)} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2) = \tfrac{1}{2}.}$$

3. Dans cette question on s'intéresse à l'événement F_k : « obtenir k fois une boule blanche après k tirages ».
   Nous noterons q_k la probabilité de F_k : $q_k = \mathbb{P}(F_k)$.

   (a) Donnez q_1 et q_2 sans justification.

   $q_1 = \mathbb{P}(E_1)$ donc

   $$\boxed{q_1 = \tfrac{1}{3}.}$$

   $q_2 = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$ donc

   $$\boxed{q_2 = \tfrac{2}{9}.}$$

   (b) Démontrez que, pour tout entier k non nul : $q_k = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$.

   L'énoncé comportait une erreur puisqu'il indiquait : $q_{k+1} = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$.

   $$q_k = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k)$$

D'après la formule des pobabilités composées :

$$\begin{aligned} q_k &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2|E1) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ q_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}.}$$

(c) Déduisez-en la nature de la suite (q_k).

Puisque $q_k = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$\boxed{(q_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3} \text{ et de premier terme } q_1 = \frac{1}{2}.}$

(d) Étudiez la monotonie de (q_k).

(q_k) est géométrique de terme initial $q_1 = \frac{1}{3}$, de raison $\frac{2}{3}$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$ donc

$\boxed{(q_k) \text{ est strictement décroissante.}}$

(e) Étudiez la convergence de (q_k).

(q_k) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc

$\boxed{(q_k) \text{ est converge vers } 0.}$

4. Dans cette question on s'intéresse à la suite (p_k). Rappelons que $p_1 = \frac{1}{3}$.

(a) Démontrez que pour tout entier naturel non nul k :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

Démontrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\{E_k, \overline{E_k}\}$ est un système complet d'événements dont les événements sont de probabilités non nulles, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{k+1}) &= \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_{k+1}|E_k) + \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_{k+1}|\overline{E_k}) \\ &= p_k \times \frac{2}{3} + (1 - p_k) \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_{k+1} = \tfrac{1}{3}p_k + \tfrac{1}{3}.}$$

(b) Démontrez que si (p_k) converge alors sa limite est nécessairement $\frac{1}{2}$.

Déterminons la valeur de l'éventuelle limite de (p_k).

Puisque $x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$, si (p_k) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors en passant à la limite dans l'égalité $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$ on obtient :

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{1}{3}.$$

Équation du premier degré qui se résout immédiatement :

$$\boxed{\text{si } (p_k) \text{ converge ce ne peut être que vers } \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Soit (v_k) la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $v_k = p_k - \frac{1}{2}$
Démontrez que (v_k) est géométrique.

Démontrons que (v_k) est géométrique.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Par définition de (v_k) :

$$v_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2}$$

D'après la formule de récurrence établie à la question 4(b) :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la définition de la suite (v_k) :

$$v_{k+1} = \frac{1}{3}v_k$$

Comme de plus $v_1 = p_1 - \frac{1}{2}$,

(v_k) est géométrique de terme initial $v_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

(d) Étudiez la convergence de (p_k).

Étudions la convergence de (p_k).

Par construction de (v_k), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$p_k = v_k + \frac{1}{2}.$$

Or, d'après la question précédente, (v_k) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc

$$v_k + \frac{1}{2} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Ainsi

(p_k) converge vers $\frac{1}{2}$.

(e) Expliquez comment choisir k pour que $0,4999 \leqslant p_k \leqslant 0,5$.

Résolvons $0,4999 \leqslant p_k \leqslant 0,5$ dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Puisque (v_k) est géométrique de terme initial $v_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{3}$, $p_k = -\frac{1}{6\times 3^{k-1}} + \frac{1}{2}$.
Donc clairement $p_k \leqslant 0,5$.

$$0,4999 \leqslant p_k$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
0,4999 &\leqslant -\frac{1}{6\times 3^{k-1}} + \frac{1}{2} \\
-6\times(0,4999-0,5) &\geqslant \frac{1}{3^{k-1}}, \text{ car } -6<0 \\
\frac{1}{0,0006} &\leqslant 3^{k-1}, \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
\ln\left(\frac{1}{0,0006}\right) &\leqslant \ln(3^{k-1}), \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
-\ln(0,0006) &\leqslant (k-1)\ln(3) \\
-\frac{\ln(0,0006)}{\ln(3)} &\leqslant k-1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour que } 0,4999 \leqslant p_k \leqslant 0,5 \text{ il faut choisir } k \geqslant \frac{\ln(0,0006)}{\ln(3)} + 1.}$$

PROBLÈME 2 : algèbre linéaire.

Dans ce problème nous noterons $\vec{0}$ le vecteur nul, c'est-à-dire le vecteur $(0,0,0)$.

Les vecteurs, éléments de $\mathbb{R}^3$, pourront être notés indifféremment en ligne ou en colonne : par exemple $(1,2,3)$ ou $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Soient $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-1,-2,1)$ et $v_3 = (2,0,3)$.

1. Dans cette question nous démontrerons que

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda(v_2 - v_1)\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donnerons une représentation paramétrique.

(a) Pour quelle valeur du nombre réel λ a-t-on l'égalité : $v_2 - v_1 = \lambda(v_2 - v_1)$? Déduisez-en que $x = v_2 - v_1 \in F$.

Puisque $v_2 - v_1 \neq \vec{0}$ la seule valeur possible pour λ est 1 : $v_2 - v_1 = 1 \times (v_2 - v_1)$.

$$\boxed{\text{Il faut et il suffit que } \lambda = 1 \text{ pour que l'égalité soit vérifiée.}}$$

$v_2 - v_1 \in \mathbb{R}^3$ et nous venons d'établir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 - v_1 = \lambda(v_2 - v_1)$ donc

$$\boxed{v_2 - v_1 \in F.}$$

(b) Par un choix astucieux de λ montrez que $\vec{0} \in F$.

$\vec{0} = 0 \times (v_2 - v_1)$ donc

$$\boxed{\vec{0} \in F.}$$

(c) Soient a un réel, x et y des vecteurs pris dans F. Il existe donc des nombres λ_x et λ_y tels que $x = \lambda_x(v_2 - v_1)$ et $y = \lambda_y(v_2 - v_1)$. Démontrez que $ax + y$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_{ax+y}(v_2 - v_1)$ en précisant la valeur de λ_{ax+y}.

Déterminons λ_{ax+y}.

$$ax + y = a\lambda(v_2 - v_1) + \lambda_y(v_2 - v_1)$$

En factorisant par $v_2 - v_1$:

$$ax + y = (a\lambda_x + \lambda_y)(v_2 - v_1)$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda_{ax+y} = a\lambda_x + \lambda_y \text{ alors } ax + y = \lambda_{ax+y}(v_2 - v_1).}$$

(d) En vous aidant des questions précédentes justifiez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Justifions que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

* $F \subset \mathbb{R}$ par construction.
* $\vec{0} \in F$ d'après la question 1(b).
* F est stable par combinaisons linéaires d'après la question 1(c).

Des trois points précédents nous déduisons que :

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

(e) Montrez que $F \neq \mathbb{R}^3$.

Pour démontrer que F n'est pas $\mathbb{R}^3$ il suffit d'exhiber un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas dans F. Pour cela nous pouvons remarquer que tous les vecteurs de F sont colinéaires à $v_2 - v_1$.

Notons $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ astucieusement choisi d'après $v_2 - v_1$ de façon à ce qu'il ne lui soit pas colinéaire.
$v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{t}$ puisque leurs coordonnées ne sont pas colinéaires :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} &= -2 \times (-1) - (-1) \times 2 \\ &= 4 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{t} \notin F$ donc

$$\boxed{F \neq \mathbb{R}^3.}$$

(f) On admet que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Donnez-en une représentation paramétrique.

Puisque F est une droite vectorielle nous savons que n'importe quel vecteur non nul de cette droite engendre F.
Or, d'après la question 1(a), $v_2 - v_1$ est vecteur de F et il n'est pas nul puisque $v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$F : \begin{cases} m_1 = -2t \\ m_2 = -1t \\ m_3 = 1t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ou plus simplement

$$\boxed{F : \begin{cases} m_1 = -2t \\ m_2 = -t \\ m_3 = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

Fin du sujet A noté sur 15.

2. Dans cette question nous allons démontrer que

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \ x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2) \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(a) L'objectif de cette question est de démontrer que $v_2 - v_1 \in H$.
Pour quelles valeurs des nombres réels λ_1 et λ_2 astucieusement choisies, a-t-on $v_2 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)$?
Conclure.

Si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$ on a bien

$$v_2 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2).$$

Donc

$$\boxed{v_2 - v_1 \in H.}$$

(b) Pour quelles valeurs des nombres réels λ_1 et λ_2 astucieusement choisies, a-t-on $v_3 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)$?
Que peut-on en déduire pour $v_3 - v_1$?

Si $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ alors on a

$$v_3 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_1).$$

Donc

$$\boxed{v_3 - v_1 \in H.}$$

(c) Soient a un réel, x et y des vecteurs pris dans H. Démontrez que $ax+y \in H$.

Démontrons que $ax + y \in H$.

$x \in H$ donc il existe $\lambda_{1,x}$ et $\lambda_{2,x}$ des réels tels que $x = \lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,x}(v_3 - v_1)$.
De même $y \in H$ donc il existe $\lambda_{1,y}$ et $\lambda_{2,y}$ des réels tels que $y = \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} ax + y &= a\left[\lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,x}(v_3 - v_1)\right] + \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1) \\ &= a\lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + a\lambda_{2,x}(v_3 - v_1) + \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1) \\ &= \left(a\lambda_{1,x} + \lambda_{1,y}\right)(v_2 - v_1) + \left(a\lambda_{2,x} + \lambda_{2,y}\right)(v_3 - v_1) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{ax + y \in H.}$$

(d) Concluez.

$H \subset \mathbb{R}^3$ par construction, H est non vide, d'après la question 2(a), et stable par combinaison linéaire, d'après la question 1(c), donc

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

3. Nous souhaitons dans cette question établir que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. Autrement dit il faut démontrer qu'il n'est pas possible d'exprimer l'un des vecteurs comme une combinaison linéaire des deux autres.
Soient a, b et c des nombres réels tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$.

(a) Déduisez de la précédente égalité un système linéaire dont a, b et c sont les solutions.

En exprimant les vecteurs avec leurs coordonnées $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a \times 1 & + & b \times (-1) & + & c \times 2 & = & 0 \\ a \times (-1) & + & b \times (-2) & + & c \times 0 & = & 0 \\ a \times 0 & + & b \times 1 & + & c \times 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ -a - 2b \\ b + 3c = 0 \end{cases}}$$

(b) Résolvez le précédent système.

Résolvons le système.

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ -3b + 2c & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ - -3b & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ 11c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ b = 0 \\ c = 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{11}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - 2L_3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système admet une unique solution } (a,b,c) = (0,0,0).}$$

(c) Concluez.

La seule combinaison linéaire $av_1 + bv_2 + cv_3$ pour laquelle on obtient le vecteur nul est obtenue pour $a = b = c = 0$, par conséquent il ,'est pas possible d'exprimer l'un ds vecteurs comme une combinaison linéaire des deux autres.

$$\boxed{v_1,\ v_2 \text{ et } v_3 \text{ sont linéairement indépendants.}}$$

4. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in \{1,2,3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. Donnez la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$.

$u_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$u_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$u_{1,3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$u_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$u_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$u_{2,3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$u_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$u_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$u_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

PROBLÈME 3 : analyse.

Partie A : étude de deux fonctions.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculez la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_f ? Calculez la limite de f en $-\infty$.

Étudions la limite de f en $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty) \times 0$. La présence d'exponentielle incite, pour lever l'indétermination, à utiliser les croissances comparées.

En développant : $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$. Par comparaison des fonctions puissances et exponentielles :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et par conséquent } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty.}$$

Pas d'indétermination en $-\infty$:

$$\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(b) Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.

Calculons f'.

f est une produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (-x^2+1)e^{-x}.}$$

Étudions le signe de f'.

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0,$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$.
Or $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(c) Donnez le tableau de variation de f.

D'après les questions précédentes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

2. Étudiez g : limites, dérivée, tableau de variation.

   Étudions g.

   * g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donnée par $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   * Donc $g' < 0$ et g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   * $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Résumons cela par un tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$+\infty$ $\searrow$	0

3. (a) Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   Étudions le signe de $f(x) - g(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Pour étudier le signe de $f(x)-g(x)$ nous allons en factoriser l'expression.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \\ &= \left[(x+1)^2 - 1\right]\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x(x+2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   D'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Montrez que les tangentes en $A(0;1)$ aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont orthogonales. *Vous pourrez démontrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs est nul.*

Montrons que les tangentes T_f et T_g à $\mathscr{C}f$ et $\mathscr{C}_g$ en A sont orthogonales.

* $T_f\,:\; y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$, donc

$$T_f\,:\; y = x+1.$$

Nous en déduisons une équation cartésienne :

$$T_f\,:\; -x+y-1=0.$$

* De même

$$T_g\,:\; x+y-1=0.$$

* D'après les équations cartésiennes $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de T_f et T_g.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ &= -1\times-(-1)\times(-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

T_f et T_g sont orthogonales.

4. Tracez les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs tangentes au point A dans le repère de l'**annexe B**.

Partie B : calcul d'aire.

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction $H : t \mapsto (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t}$, admette la fonction $t \mapsto \left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{-t}$ pour dérivée.

   Déterminons a, b et c.

   H est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H'(t) &= (2at + b)\mathrm{e}^{-x} - (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left[(2at + b) - (at^2 + bt + c)\right]\mathrm{e}^{-t} \\ &= \left[-at^2 + (2a - b)t - c\right]\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

   On souhaite que pour tout t réel :

$$\left[-at^2 + (2a - b)t + (b - c)\right]\mathrm{e}^{-t} = \left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{-t}$$

   Autrement dit, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$:

$$-at^2 + (2a - b)t + (b - c) = t^2 + 2t$$

   Ceci étant vrai pour tout t réel nous en déduisons :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 0 \end{cases}.$$

   Donc : $a = -1$, $b = -4$ et $c = -4$.
   Il est aisé de vérifier que ces valeurs conviennent effectivement.

$$\boxed{H : t \mapsto (-t^2 - 4t + 4)\mathrm{e}^{-t}.}$$

2. L'aire entre les deux courbes, pour les x positifs jusqu'à une valeur $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est donnée par : $\mathscr{A}(\alpha) = H(\alpha) - H(0)$.
   Déterminez $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.

   Étudions la limite de $\mathscr{A}$ en $+\infty$.

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha) &= H(\alpha) - H(0)\\ &= (-\alpha^2 - 4\alpha + 4)\mathrm{e}^{-\alpha} + 4\end{aligned}$$

Par comparaison puissance exponentielle :

$$\boxed{\lim_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 4.}$$

Partie C : étude d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln[f(n)]$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est décroissante.

   Étudions la monotonie de (u_n).

   f est décroissante sur $[, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, 4\mathrm{e}^{-1}]$, et ln est croissante sur $]0, 4\mathrm{e}^{-1}]$, donc par composition $\ln \circ f$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

   $$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$$

2. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   (a) Montrez que $u_n = -n + 2\ln(n+1)$.

   Justifions la formule proposée pour u_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\begin{aligned}u_n &= \ln(f(n))\\ &= \ln\left((n+1)^2\mathrm{e}^{-n}\right)\\ &= 2\ln(n+1) + \ln\left(\mathrm{e}^{-n}\right)\end{aligned}$$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - n + 2\ln(n+1).}$$

(b) Démontrez que $S_n = 2\ln[(n+1)!] - \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Démontrons la formule explicite de S_n proposée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

D'après la question précédente :

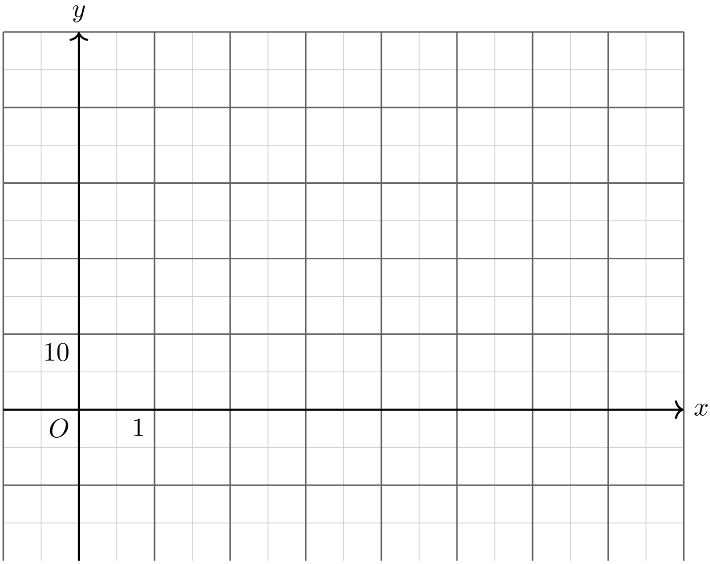
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} -k + 2\ln(k+1) \\
&= \left(-\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)\right) \\
&= -\frac{n(n+1)}{2} + 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right) \\
&= -\frac{n(n+1)}{2} + 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n+1} k\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

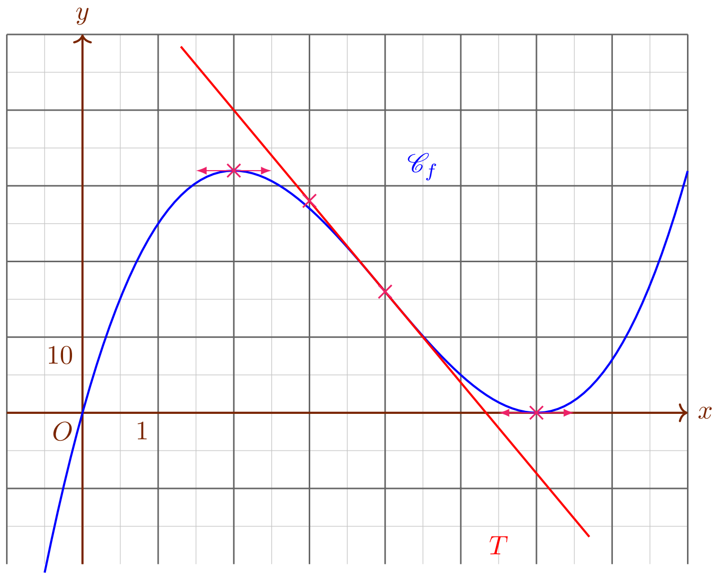
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = -\tfrac{n(n+1)}{2} + 2\ln((n+1)!).}$$

ANNEXE A.

Identifiant Wims :

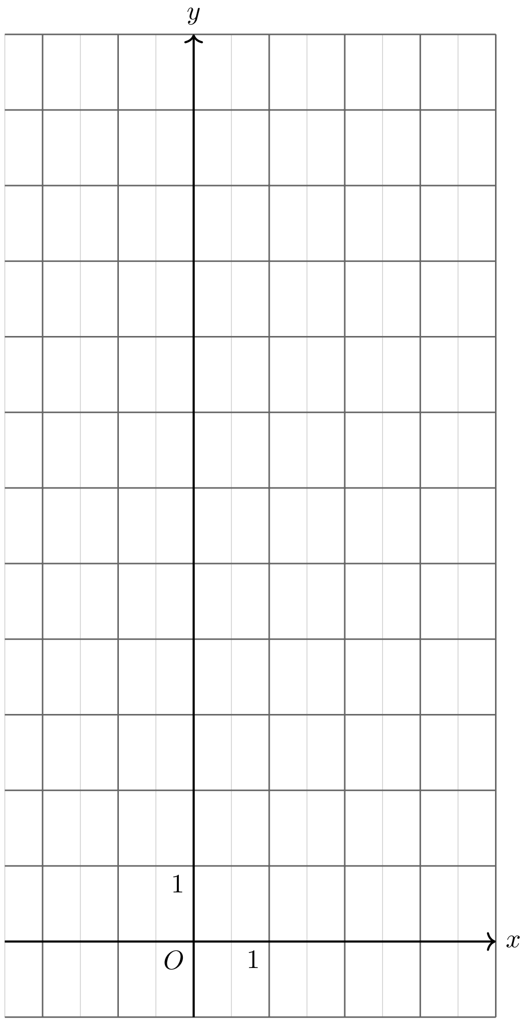


Sont indiqués en rose les éléments de construction déduis des démonstrations faites dans les questions précédentes (points particuliers, tangentes, asymptotes, points d'intersection des deux courbes, position relative, variations, symétries, ...).

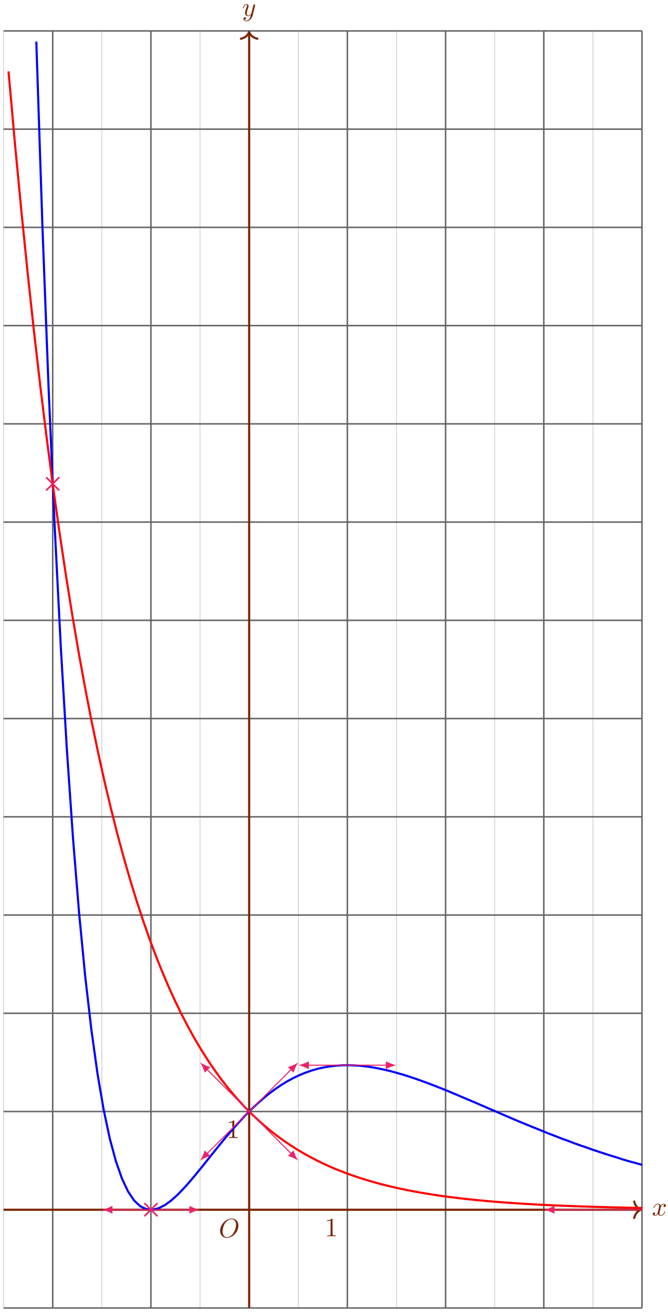

y
x
O
1
10
$\mathscr{C}_f$
T

ANNEXE B.

Identifiant Wims :



Sont indiqués en rose les éléments de construction déduis des démonstrations faites dans les questions précédentes (points particuliers, tangentes, asymptotes, points d'intersection des deux courbes, position relative, variations, symétries, ...).


y
x
O
1
1