Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/11/03.

Début du sujet A noté sur 15.
Exercices 1 à 7

Exercice 1 : calcul numérique.

Partie A : calcul numérique.

1. Donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\dfrac{15}{7} - \dfrac{29}{7}$.   b) $\dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{7}$.   c) $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{8}{7}$.   d) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{27}{5}}$.

2. Donnez le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers les plus petits possibles : par exemple $\sqrt{68} = \sqrt{2^2 \times 17} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\sqrt{64}$.   b) $\sqrt{72}$.   c) $\sqrt{3} \times \sqrt{75}$.   d) $\sqrt{12}$.

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où a et n sont des nombres entiers. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $A = 5^3 \times 5^3 \times 5^2$.   b) $B = \dfrac{7^{24} \times 7^8}{7^{17}}$.

   c) $C = 17^{22} \times 17^{-31}$.   d) $D = \dfrac{13^4 \times 13^{-8}}{(13^{-4})^3 \times 13^{-5}}$.

Partie B : calcul littéral.

Dans cet partie aucune justification n'est exigée.

1. Développez les expressions suivantes.

   a) $M(x) = 6(x+8)$.   b) $N(x) = -2(7x-5)$.

   c) $P(x) = (4x+5)(2x-4)$.   d) $Q(x) = (5x-3)^2$.

   e) $R(x) = -3(x-4)(3x-1)$.   f) $S(x) = -(2x-1)(x+3)^2$.

2. Factorisez les expressions suivantes.

   a) $T(x) = 2x^7 + x^6 - 5x^4$.

   b) $U(x) = 49x^2 - 14x + 1$.

   c) $V(x) = x^2 - 23$.

   d) $W(x) = (x^2 - 16) - (x + 4)$.

Partie C : résolution d'équations.

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x.

a) $2x + 3 = 4$.

b) $(x - 2)(3x - 4) = 0$.

c) $x^2 - 2x = 1$.

d) $\dfrac{3x}{2} = 0$.

Partie D : étude du signe de fonctions.

Donnez *sans aucune justification* le tableau de signe des fonctions suivantes.

a) $g_1 : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

b) $g_2 : x \mapsto 2x - 7$.

c) $g_3 : x \mapsto (-x + 1)(2x + 4)$.

d) $g_4 : x \mapsto \dfrac{x - 5}{x + 1}$.

Exercice 2 : dérivées en vrac.

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans vous préoccuper du domaine de dérivabilité, mais en justifiant si nécessaire.

Aucune présentation particulière de la fonction dérivée n'est attendue.

a) $f_1 : x \mapsto \ln(x)$.

b) $f_2 : x \mapsto 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

c) $f_3 : x \mapsto (3x - 1)\sqrt{x}$.

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

e) $f_5 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x}\right)$.

f) $f_6 : x \mapsto \exp\left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)$.

Exercice 3 : étude des variations d'une fonction.

Étudiez les variations de $f : x \mapsto (x^2 - 3x - 3)e^x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Début du sujet B noté sur 20.

Exercices 4 à 10.

Exercice 4.

Déterminez la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $A_n = \ln(n)$.

b) $B_n = n^3\sqrt{n}$.

c) $C_n = \dfrac{\frac{1}{n}+3}{n^2}$.

d) $D_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 4}{n^5 - n^3 + n}$.

e) $E_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{234}}$.

f) $F_n = \dfrac{n!n^4}{3^n}$.

g) $G_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n}$.

h) $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{\pi^k}$.

Exercice 5.

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{2^n}.$$

1. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,
$$v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
2. Déduisez-en que la suite (v_n) est majorée.
3. (a) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2, $n+2 \leqslant 2^n$.

   (b) La suite (v_n) est-elle minorée ?
4. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 6.

On considère les ensembles

$$F = \left\{ Z \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 = 0 \right\}$$

et

$$G = \left\{ Z \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 + 1 = 0 \right\}$$

en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que G n'est pas un sous -espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   Montrez que $X \in F$.

4. Soit $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Démontrez que $Y \notin F$.

   (b) Calculez le vecteur $2X - 3Y$.

   (c) Justifiez que trouver des réels a et b tels que $aX + bY = 0$ équivaut à résoudre le système d'inconnues a et b suivant

   $$(E) : \left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right. .$$

   (d) Résolvez le système (E).

   (e) X et Y sont-ils colinéaires ?

5. Démontrez que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

6. Déterminez une représentation paramétrique de F.

Exercice 7.

Partie A : une équation.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculez $f(0)$.

2. Étudiez les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. (a) En admettant que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f peut être déduite de celle de la fonction ln par deux translations, l'une de vecteur $-\vec{i}$ puis l'autre de vecteur $\vec{j}$ dessinez à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction ln puis celle de $\mathscr{C}$ sur l'**annexe 1**.

   (b) Dessinez sur l'**annexe 1** la droite d'équation $y = x$ également appelée première bissectrice.

   (c) D'après le graphique combien de solutions l'équation $f(x) = x$ semble-t-elle admettre dans $[0, +\infty[$.

   Nous admettons que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution notée α et que $\alpha \in [1; 3]$.

Partie B : approcher α.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$.

1. On souhaite justifier que la suite (u_n) est bien définie. Pour cela il faut établir que $[0, +\infty[$ est stable par f.
   Démontrez que si $x \in [0, +\infty[$ alors $f(x) \in [0, +\infty[$.
2. Démontrez par récurrence, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
4. Démontrez que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
5. D'après l'inégalité des accroissements finis (que nous n'avons pas encore étudiée et que nous admettrons) le résultat précédent permet d'affirmer que :
   $$|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$
   pour tout $x \in [1, +\infty[$.
   Déduisez-en que, pour tout entier naturel n, on a
   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$
   Rappelons que α est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

7. Démontrez que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précisez sa limite.

8. Déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Expliquez en quoi l'on peut dire que (u_n) est une suite de valeurs approchées de α.

10. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Puis expliquez comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près de α.
Rappelons que $\alpha \in [1;3]$.

Fin du sujet A.

Exercice 8.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

1. (a) Démontrez que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique.

   (b) Déduisez-en sa limite.

2. Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Que pouvez-vous en déduire ?

3. (a) Démontrez que la suite $(2u_n + 3v_n)$ est constante.

   (b) Déduisez-en la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 9.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Cet exercice est consacré à l'étude de la famille de fonctions f_n.

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}.$$

   Étudiez le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminez le signe de h_n sur $]-1,+\infty[$.

2. (a) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ vérifiez que :

$$f_1'(x) = h_1(x)$$

   et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$

   (b) On suppose n impair. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, justifiez que $f_n'(x)$ et h_n sont de même signe.
   Dressez alors le tableau de variations de la fonction f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

   (c) On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variation de f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. (a) Étudiez la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

   (b) Tracez ces deux courbes sur l'**annexe 2**.

Exercice 10.

On considère la suite (u_k) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{2}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k+2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) Démontrez que

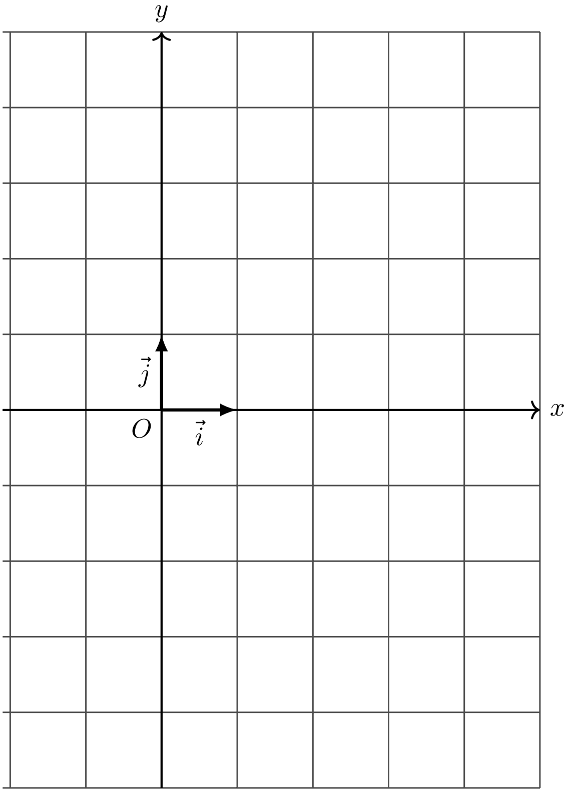
$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right).$$

(b) Déduisez-en (avec un télescopage) que $S_n = 1 - \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

(c) Calculez la limite de la suite (S_n).

Fin du sujet B.

Annexe 1 : courbes représentatives de ln et f.



Annexe 2 : courbes représentatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.