Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/11/03.

Exercice 1 : calcul numérique.

Partie A : calcul numérique.

1. a) -2. b) $\frac{41}{21}$. c) $\frac{32}{21}$. d) $\frac{1}{9}$.

2. a) 8. b) $6\sqrt{2}$. c) 15. d) $2\sqrt{3}$.

3. a) $A = 5^8$. b) $B = 7^{15}$.
   c) $C = 17^{-9}$. d) $D = 13^{13}$.

Partie B : calcul littéral.

1. a) $M(x) = 6x + 48$. b) $N(x) = -14x + 10$.
   c) $P(x) = 8x^2 - 6x - 20$. d) $Q(x) = 25x^2 - 30x + 9$.
   e) $R(x) = -9x^2 + 39x - 12$. f) $S(x) = -2x^3 - 11x^2 - 12x + 9$

2. a) $T(x) = x^4(2x^3 + x^2 - 5)$. b) $U(x) = (7x - 1)^2$.
   c) $V(x) = (x - \sqrt{23})(x + \sqrt{23})$. d) $W(x) = (x + 4)(x - 5)$.

Partie C : résolution d'équations.

les ensembles de solutions sont :

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. b) $\left\{2, \frac{4}{3}\right\}$. c) $\{1, -1\}$. d) $\{0\}$.

Partie D : étude du signe de fonctions.

a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g_1		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
g_2		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
g_3		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
g_4		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 2 : dérivées en vrac.

a) $f_1'(x) = \frac{1}{x}$.

b) $f_2'(x) = 12x^2 - 6x + 5$.

c) $f_3'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

d) $f_4'(x) = \frac{e^x(x^2+1)-e^x\times 2x}{(x^2+1)^2}$.

e) $f_5'(x) = \frac{1}{2x}$.

f) $f_6'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}\exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$.

Exercice 3 : étude des variations d'une fonction.

$f'(x) = (x^2 - x - 6)e^x$.
f' est du signe de $g : x \mapsto x^2 - x - 6$.
Or 2 et -3 sont racines de la fonction polynomiale de degré deux g donc

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$6e^{-3}$	$\searrow$	$-4e^2$	$\nearrow$	

Exercice 4.

a) D'après le cours :

$$\boxed{A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

b) $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par produit

$$\boxed{B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

c) $\frac{1}{n} + 3 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3$ et $n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$ par quotient

$$\boxed{C_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

d) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 - n^2 + 4}{n^5 - n^3 + n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n^5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc

$$\boxed{D_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

e) $e > 1$ donc par comparaison des suites géométriques et puissances

$$\boxed{E_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

f) Par comparaison des suites géométrique et puissance $\frac{n!}{3^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis par produit

$$\boxed{F_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

g)

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n} &= \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - (n^2 + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n}} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par passage à l'inverse

$$\boxed{G_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

h)

$$\begin{aligned} H_n &= n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^n \\ &= n\frac{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{\pi}-1} \end{aligned}$$

Or $-1 < \frac{1}{\pi} < 1$ donc $\left(\frac{1}{\pi}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Exercice 5.

1. Première étape choix de la phrase (qui dépend de n) à démontrer.
   Notons $P(n)$ la phrase $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ où n désigne un entier naturel supérieur à 1.

   Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs à 1.

   * Initialisation : il faut vérifier que la phrase $P(1)$ est vraie. Autrement dit il faut établir que $v_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$ est vraie.
     D'une part $v_1 = v_0 + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ et d'autre part $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$ donc $v_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$.
     Ainsi $P(1)$ est vraie.
   * Hérédité. Il faut établir que pour un rang particulier si $P(n)$ est vraie alors la phrase suivante $P(n+1)$ l'est aussi.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     Supposons $P(n)$ vraie.
     Démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

     D'après la formule de récurrence définissant la suite (v_n) :

     $$v_{n+1} = v_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Or, d'après la formule de récurrence, $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ donc

$$v_{n+1} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

En mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Nous obtenons bien $P(n+1)$.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 2 - \tfrac{n+2}{2^n}}$$

2. Démontrons que (v_n) est majorée.

   Soit $n \geqslant 1$.
   $\frac{n+2}{2^n} \geqslant 0$ donc $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \geqslant 2$.

   $$\boxed{(v_n) \text{ est majorée par } 2.}$$

3. (a) Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $n + 2 \leqslant 2^n$.

   * $2 + 2 \leqslant 2^2$.
   *

   $$\begin{aligned} 2^n &\geqslant n+2 \\ 2^n \times 2 &\geqslant (n+2) \times 2 \\ 2^{n+1} &\geqslant 2n+4 \\ &\geqslant n+1+2+(n+1) \\ &\geqslant n+1+2 \end{aligned}$$

   * On a démontré par récurrence que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \Rightarrow n+2 \leqslant 2^n.}$$

(b) démontrons que (v_n) est minorée par 0.

Soit $n \geqslant 2$.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} n+2 &\leqslant 2^n \\ \frac{n+2}{2^n} &\leqslant 1 \\ -\frac{n+2}{2^n} &\geqslant -1 \\ 2-\frac{n+2}{2^n} &\geqslant 2-1 \\ v_n &\geqslant 1 \end{aligned}$$

De plus $v_0 = 0$ et $v_1 = \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est minorée par } 0.}$$

4. Démontrons que (v_n) est convergente.

   * Soit $n \geqslant 1$.
   $v_n - v_{n-1} = \frac{n}{2^n} \geqslant 0$ donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   * Comme de plus $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée finalement

$$\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$$

Exercice 6.

1. Démontrons que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   Raisonnons par l'absurde : supposons G sous-ev. Alors $0 \in G$.
   Or $6 \times 0 + 3 \times 1 \neq 0$ donc $0 \notin G$ ce qui est impossible.

$$\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

2. Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(i) $F \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $6 \times 0 + 3 \times 0 = 0$.

(iii) Soient $a \in \mathbb{R}$, $x,y \in F$.

On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 3y_1 = 0 \\ 6x_2 + 3y_2 = 0 \end{array} \right.$.

$$a \cdot x + y = \begin{pmatrix} ax_1 + y_2 \\ ax_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $a \cdot x + y \in F$.

$$\begin{aligned} 6 \times (ax_1 + y_1) + 3(ax_2 + y_2) &= a6x_1 + a3x_2 + 6y_1 + 3y_2 \\ &= a\underbrace{(6x_1 + 3x_2)}_{=0} + \underbrace{6y_1 + 3y_2}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $a \cdot x + y \in F$.

D'après les trois points précédents

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

3. $X \in \mathbb{R}^2$ et $6 \times 1 + 3 \times (-2) = 0$ donc

$$\boxed{X \in F.}$$

4. (a) $Y \in \mathbb{R}^2$ mais $6 \times 3 + 3 \times 1 = 21 \neq 0$ donc

$$\boxed{Y \notin F.}$$

(b)

$$\boxed{2X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}.}$$

(c) $a \cdot X + b \cdot Y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 3 \\ a \times (-2) + b \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right.$.

(d) Résolvons (E).

$$\left\{\begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array}\right. .$$

équivaut successivement à

$$\left\{\begin{array}{rcrll} a & + & 3b & = 0 & \\ & & 5b & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{rcrll} a & + & 3b & = 0 & \\ & & b & = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrll} a & & & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ & & b & = 0 & \end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution $(0{,}0)$.

(e) Démontrons que X et Y ne sont pas colinéaires.

* Première méthode : la seule combinaison linéaire nulle est celle dont les coefficients sont nuls.
  Nous avons démontré à la question précédente que pour $a \cdot X + b \cdot Y = 0$ il faut que $a = b = 0$.
  Autrement dit il est impossible de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul et tel que $\lambda \cdot X = Y$ ou $X = \lambda Y$.

  X et Y ne sont pas colinéaires.

* Deuxième méthode : calcul du déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \det(X,Y) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - (-2) \times 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

  $\det(X,Y) \neq 0$ donc

  X et Y ne sont pas colinéaires.

* Troisième méthode : s'assurer qu'il n'y a pas de proportionnalité entre les coordonnées de X et Y.

5. Démontrons que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

   Au moins deux procédés :
   — Montrer qu'il existe un vecteur non nul qui engendre F. Et puisque $X \in F \setminus \{0\}$ il faudrait montrer que tous les éléments de F peuvent s'écrire $t \cdot X$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   — En utilisant le fait les seuls sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles.

   D'après les questions précédentes, F est un sous-espace vectoriel qui n'est pas $\{0\}$ (puisqu'il contient le vecteur non nul X) ni $\mathbb{R}^2$ (puisqu'il ne contient pas le vecteur Y) donc, forcément,

   $$\boxed{F \text{ est une droite vectorielle de } \mathbb{R}^2.}$$

6. Déterminons une représentation paramétrique de F.

   D'après ce qui précède $F\{t \cdot X \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ donc

   $$\boxed{F : \left\{ \begin{array}{rcr} m_1 & = & t \\ m_2 & = & -2t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}}$$

Exercice 7.

Partie A : une équation.

1. $f(0) = 1 + \ln(1 + 0)$

   $$\boxed{f(0) = 1.}$$

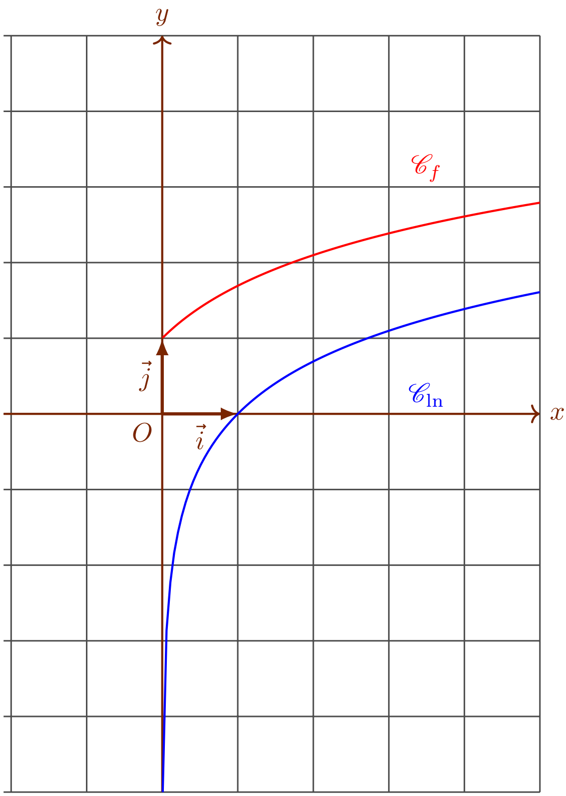
2. Étudions les variations de f sur $[0; +\infty[$.

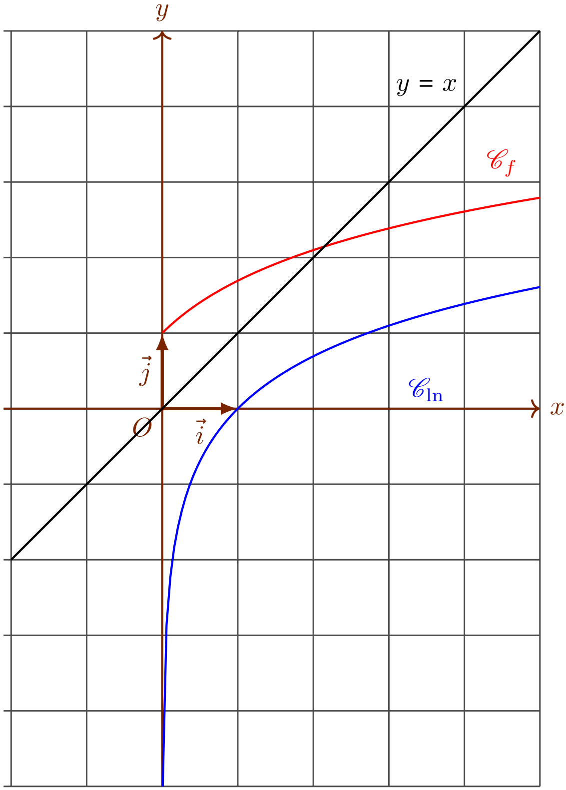
   * Calcul de la dérivée.
     ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f l'est sur $[0; +\infty[$ en tant que fonction composée.
     Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

* Étude du signe de la dérivée et variations de la fonction.
  Clairement $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc f est strictement croissante.
* Limites aux bornes du domaine de définition.
  Clairement, par composition, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
f	$1 \nearrow +\infty$

3. (a) 

(b) 

(c) d'après le graphique il semble que

> l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

Partie B : approcher α.

1. Démontrons l'implication : si $x \in [0, +\infty[$ alors $f(x) \in [0, +\infty[$.

   Soit $x \geqslant 0$.
   Puisque f est croissante sur $[0, +\infty[$

$$f(x) \geqslant f(0)$$

   Or $f(0) = 1$ donc

$$f(x) \geqslant 1 \geqslant 0.$$

$$\boxed{\text{Nous avons démontré que } [0, +\infty[\text{ est stable par } f.}$$

2. Démontrons par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $u_0 = 1$ et $f(u_0) = f(1) = 1 + \ln(2) \geqslant 1$ car $\ln(2) > 0$.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_{n+1} \geqslant u_n$.
     f est croissante sur $[0; +\infty[$ (et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant 0$) donc

     $$f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$$
     $$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

   * On a démontré par récurrence que

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$$

3. Par une récurrence immédiate $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par $u_0 = 1$:

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 1.}$$

4. Démontrons l'encadrement proposé.

   Pour démontrer cet encadrement nous allons établir chaque inégalité séparément.

   * Nous avions déjà remarqué que $f' > 0$ donc a fortiori $f' \geqslant 0$.
   * Soit $x \geqslant 1$.
     Donc

     $$1 + x \geqslant 2$$

     Et puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

     $$\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \tfrac{1}{2}.}$$

5. En choisissant $x = u_n$ dans l'inégalité proposée :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \tfrac{1}{2}|x - \alpha|.}$$

6. * $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$.
   * D'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\tfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.}$$

7. $0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   Or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit, d'après le théorème des gendarmes que $(|u_n - \alpha|)$ converge vers 0.
   Finalement

$$\boxed{(u_n - \alpha) \text{ converge vers } 0.}$$

8. $$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha.}$$

9. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ signifie que la valeur de u_n se rapproche de celle de α lorsque n grandi.

10. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

* D'une part : D'après la question 6 :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

* D'autre part

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 1 - u_0 &\leqslant \alpha - u_0 \leqslant 3 - u_0 \\ 0 &\leqslant \alpha - u_0 \leqslant 2 \end{aligned}$$

Donc

$$|u_0 - \alpha| \leqslant 2$$

Nous en déduisons

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

Déterminons n.

Pour que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ il suffit que $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-3}$.
Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-3} &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqslant \ln\left(10^{-3}\right) \\ &\Longleftrightarrow -(n-1)\ln(2) \leqslant -3\ln(10) \end{aligned}$$

$$n \geqslant 1 + 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près l faut utiliser u_n avec $n \geqslant 1 + 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$.

Exercice 8.

1. (a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{6}$

   $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de terme initial $v_0 - u_0 = 12$.

   (b) $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc

   $$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. * Nous avons déjà démontré que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   * $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
     Or $(v_n - u_n)$ est géométrique donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \times \frac{12}{6^{n+1}} \geqslant 0$.
     Donc (u_n) est croissante.
   * $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(v_n - u_n) = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{6^{n+1}} \leqslant 0$.
     Donc (v_n) est décroissante.

   (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. (a) Si elle est constante alors tous les termes égalent le premier $2u_0 + 3v_0 = 2 \times 0 + 3 \times 12 = 36$.

   Démontrons par récurrence que $2u_n + 3v_n = 36$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $2u_0 + 3v_0 = 2 \times 0 + 3 \times 12 = 36$.
   *

   $$\begin{aligned} 2u_{n+1} + 3v_{n+1} &= 2\frac{u_n + v_n}{2} + 3\frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= 2u_n + 3v_n \\ &= 36 \end{aligned}$$

(b) Elles convergent vers la même limite ℓ qui doit vérifier $2\ell + 3\ell = 36$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers } \frac{36}{5}.}$$

Exercice 9.

1. $h_n'(x) = \frac{nx+n+1}{(1+x)^2}$.
   $h_n'(x) > 0 \iff x > -\frac{n+1}{n}$.
   Donc h_n est strictement croissante.
   Comme $h_n(0) = 0$ on en déduit

x	-1				$+\infty$
h_n	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. (a)

   (b) Si n est impair alors $n-1$ est pair : $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$. Donc $x \mapsto \left(x^2\right)^k$ est positive donc f_n' est du signe de h_n.

x	-1		0		$+\infty$
h_n	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f_n	$\|\|$	$+\infty$ $\rightarrow$	0	$\longrightarrow$	$+\infty$

   (c)

x	-1		0		$+\infty$
$x^{n-1}h_n$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
f_n	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\longrightarrow$	$+\infty$

3. (a)

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x) \\ &= x(1-x)\ln(1+x) \end{aligned}$$

x	-1		0		1		$+\infty$
$f_1(x) - f_2(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	0	$-$	

(b)

Exercice 10.

1. On met au même dénominateur.
2. (a)

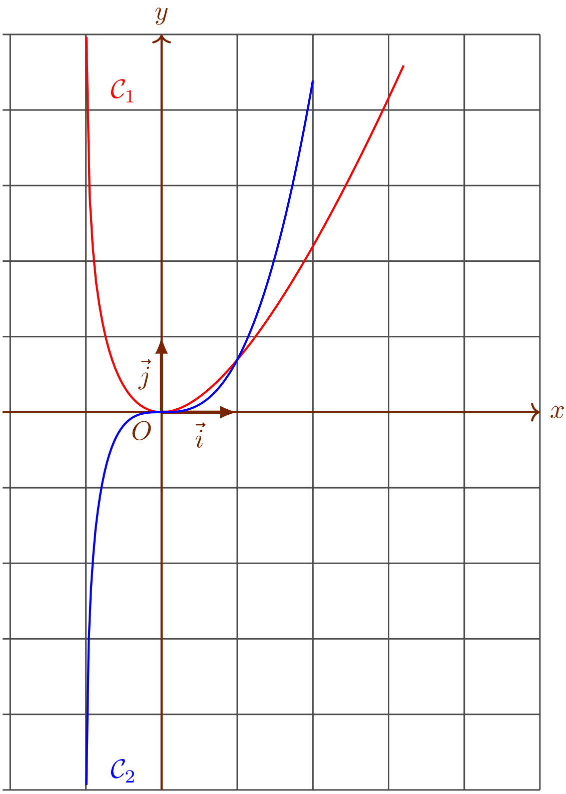
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} S_n &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\ &= 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(c) $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Annexe 1 : courbes représentatives de $\ln$ et f.



Annexe 2 : courbes représentatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.