Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/11/03.

Début du sujet A noté sur 15.

Exercices 1 à 7

Exercice 1 : calcul numérique.

Partie A : calcul numérique.

1. Donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible. *Aucune justification n'est exigée.*

a) $\dfrac{15}{7} - \dfrac{29}{7}$. b) $\dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{7}$. c) $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{8}{7}$. d) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{27}{5}}$.

a) -2. b) $\frac{41}{21}$. c) $\frac{32}{21}$. d) $\frac{1}{9}$.

2. Donnez le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers les plus petits possibles : par exemple $\sqrt{68} = \sqrt{2^2 \times 17} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$. *Aucune justification n'est exigée.*

a) $\sqrt{64}$. b) $\sqrt{72}$. c) $\sqrt{3} \times \sqrt{75}$. d) $\sqrt{12}$.

a) 8. b) $6\sqrt{2}$. c) 15. d) $2\sqrt{3}$.

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où a et n sont des nombres entiers. *Aucune justification n'est exigée.*

a) $A = 5^3 \times 5^3 \times 5^2$. b) $B = \dfrac{7^{24} \times 7^8}{7^{17}}$.

c) $C = 17^{22} \times 17^{-31}$. d) $D = \dfrac{13^4 \times 13^{-8}}{\left(13^{-4}\right)^3 \times 13^{-5}}$.

a) $A = 5^8$. b) $B = 7^{15}$.

c) $C = 17^{-9}$. d) $D = 13^{13}$.

Partie B : calcul littéral.

Dans cet partie aucune justification n'est exigée.

1. Développez les expressions suivantes.

a) $M(x) = 6(x+8)$.
b) $N(x) = -2(7x-5)$.
c) $P(x) = (4x+5)(2x-4)$.
d) $Q(x) = (5x-3)^2$.
e) $R(x) = -3(x-4)(3x-1)$.
f) $S(x) = -(2x-1)(x+3)^2$.

a) $M(x) = 6x + 48$.
b) $N(x) = -14x + 10$.
c) $P(x) = 8x^2 - 6x - 20$.
d) $Q(x) = 25x^2 - 30x + 9$.
e) $R(x) = -9x^2 + 39x - 12$.
f) $S(x) = -2x^3 - 11x^2 - 12x + 9$

2. Factorisez les expressions suivantes.

a) $T(x) = 2x^7 + x^6 - 5x^4$.
b) $U(x) = 49x^2 - 14x + 1$.
c) $V(x) = x^2 - 23$.
d) $W(x) = (x^2 - 16) - (x+4)$.

a) $T(x) = x^4(2x^3 + x^2 - 5)$.
b) $U(x) = (7x-1)^2$.
c) $V(x) = (x - \sqrt{23})(x + \sqrt{23})$.
d) $W(x) = (x+4)(x-5)$.

Partie C : résolution d'équations.

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x.

a) $2x + 3 = 4$.
b) $(x-2)(3x-4) = 0$.
c) $x^2 - 2x = 1$.
d) $\dfrac{3x}{2} = 0$.

les ensembles de solutions sont :

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
b) $\left\{2, \frac{4}{3}\right\}$.
c) $\{1, -1\}$.
d) $\{0\}$.

Partie D : étude du signe de fonctions.

Donnez *sans aucune justification* le tableau de signe des fonctions suivantes.

a) $g_1 : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

b) $g_2 : x \mapsto 2x - 7$.

c) $g_3 : x \mapsto (-x+1)(2x+4)$.

d) $g_4 : x \mapsto \dfrac{x-5}{x+1}$.

a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g_1		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
g_2		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
g_3		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
g_4		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 2 : dérivées en vrac.

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans vous préoccuper du domaine de dérivabilité, mais en justifiant si nécessaire.

Aucune présentation particulière de la fonction dérivée n'est attendue.

a) $f_1 : x \mapsto \ln(x)$.

b) $f_2 : x \mapsto 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

c) $f_3 : x \mapsto (3x-1)\sqrt{x}$.

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

e) $f_5 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x}\right)$.

f) $f_6 : x \mapsto \exp\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$.

a) $f_1'(x) = \frac{1}{x}$.

b) $f_2'(x) = 12x^2 - 6x + 5$.

c) $f_3'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

d) $f_4'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2}$.

e) $f_5'(x) = \frac{1}{2x}$.

f) $f_6'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$.

Exercice 3 : étude des variations d'une fonction.

Étudiez les variations de $f : x \mapsto (x^2 - 3x - 3)e^x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^2 - x - 6)e^x$.
f' est du signe de $g : x \mapsto x^2 - x - 6$.
Or 2 et -3 sont racines de la fonction polynomiale de degré deux g donc

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$6\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$-4\mathrm{e}^{2}$	$\nearrow$	

Début du sujet B noté sur 20.

Exercices 4 à 10.

Exercice 4.

Déterminez la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $A_n = \ln(n)$.

b) $B_n = n^3\sqrt{n}$.

c) $C_n = \dfrac{\frac{1}{n} + 3}{n^2}$.

d) $D_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 4}{n^5 - n^3 + n}$.

e) $E_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{234}}$.

f) $F_n = \dfrac{n!n^4}{3^n}$.

g) $G_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n}$.

h) $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{\pi^k}$.

a) D'après le cours :

$$\boxed{A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

b) $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par produit

$$\boxed{B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

c) $\frac{1}{n} + 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ par quotient

$$\boxed{C_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+4}{n^5-n^3+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc

$$\boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

e) $e > 1$ donc par comparaison des suites géométriques et puissances

$$\boxed{E_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

f) Par comparaison des suites géométrique et puissance $\frac{n!}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis par produit

$$\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

g)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n} &= \frac{\sqrt{n^2+n+1} - (n^2+n)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n}}\end{aligned}$$

Or $\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par passage à l'inverse

$$\boxed{G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

h)

$$H_n = n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^n$$
$$= n\frac{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{\pi} - 1}$$

Or $-1 < \frac{1}{\pi} < 1$ donc $\left(\frac{1}{\pi}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Exercice 5.

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{2^n}.$$

1. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1,

$$v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Première étape choix de la phrase (qui dépend de n) à démontrer.

Notons $P(n)$ la phrase $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ où n désigne un entier naturel supérieur à 1.

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs à 1.

* Initialisation : il faut vérifier que la phrase $P(1)$ est vraie. Autrement dit il faut établir que $v_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$ est vraie.

  D'une part $v_1 = v_0 + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ et d'autre part $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$ donc $v_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$.
  Ainsi $P(1)$ est vraie.

* Hérédité. Il faut établir que pour un rang particulier si $P(n)$ est vraie alors la phrase suivante $P(n+1)$ l'est aussi.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $P(n)$ vraie.
  Démontrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.

  D'après la formule de récurrence définissant la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

  Or, d'après la formule de récurrence, $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ donc

$$v_{n+1} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

  En mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

  Nous obtenons bien $P(n+1)$.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}}$$

2. Déduisez-en que la suite (v_n) est majorée.

Démontrons que (v_n) est majorée.

Soit $n \geqslant 1$.
$\frac{n+2}{2^n} \geqslant 0$ donc $v_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \geqslant 2$.

$$\boxed{(v_n) \text{ est majorée par } 2.}$$

3. (a) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2, $n+2 \leqslant 2^n$.

Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $n+2 \leqslant 2^n$.

* $2+2 \leqslant 2^2$.
*

$$\begin{aligned} 2^n &\geqslant n+2 \\ 2^n \times 2 &\geqslant (n+2)\times 2 \\ 2^{n+1} &\geqslant 2n+4 \\ &\geqslant n+1+2+(n+1) \\ &\geqslant n+1+2 \end{aligned}$$

* On a démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \Rightarrow n+2 \leqslant 2^n.}$$

(b) La suite (v_n) est-elle minorée ?

démontrons que (v_n) est minorée par 0.

Soit $n \geqslant 2$.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} n+2 &\leqslant 2^n \\ \frac{n+2}{2^n} &\leqslant 1 \\ -\frac{n+2}{2^n} &\geqslant -1 \\ 2-\frac{n+2}{2^n} &\geqslant 2-1 \\ v_n &\geqslant 1 \end{aligned}$$

De plus $v_0 = 0$ et $v_1 = \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est minorée par } 0.}$$

4. La suite (v_n) est-elle convergente ?

   Démontrons que (v_n) est convergente.

   * Soit $n \geqslant 1$.
     $v_n - v_{n-1} = \frac{n}{2^n} \geqslant 0$ donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   * Comme de plus $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée finalement

   $$\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$$

Exercice 6.

On considère les ensembles

$$F = \left\{Z \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{Z \in \mathbb{R}^2 \mid 6z_1 + 3z_2 + 1 = 0\right\}$$

en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrez que G n'est pas un sous -espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   Démontrons que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   Raisonnons par l'absurde : supposons G sous-ev. Alors $0 \in G$.
   Or $6 \times 0 + 3 \times 1 \neq 0$ donc $0 \notin G$ ce qui est impossible.

   $$\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

2. Démontrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

   Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $F \subset \mathbb{R}^2$.

   (ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $6 \times 0 + 3 \times 0 = 0$.

(iii) Soient $a \in \mathbb{R}$, $x,y \in F$.

On a donc : $\begin{cases} 6x_1 + 3y_1 = 0 \\ 6x_2 + 3y_2 = 0 \end{cases}$.

$$a \cdot x + y = \begin{pmatrix} ax_1 + y_2 \\ ax_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $a \cdot x + y \in F$.

$$\begin{aligned} 6 \times (ax_1 + y_1) + 3(ax_2 + y_2) &= a6x_1 + a3x_2 + 6y_1 + 3y_2 \\ &= a\underbrace{(6x_1 + 3x_2)}_{=0} + \underbrace{6y_1 + 3y_2}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $a \cdot x + y \in F$.

D'après les trois points précédents

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

3. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   Montrez que $X \in F$.

   $X \in \mathbb{R}^2$ et $6 \times 1 + 3 \times (-2) = 0$ donc

   $$\boxed{X \in F.}$$

4. Soit $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Démontrez que $Y \notin F$.

   $Y \in \mathbb{R}^2$ mais $6 \times 3 + 3 \times 1 = 21 \neq 0$ donc

   $$\boxed{Y \notin F.}$$

(b) Calculez le vecteur $2X - 3Y$.

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(c) Justifiez que trouver des réels a et b tels que $aX + bY = 0$ équivaut à résoudre le système d'inconnues a et b suivant

$$(E) : \left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right. .$$

$$a \cdot X + b \cdot Y = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 3 \\ a \times (-2) + b \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right. .$$

(d) Résolvez le système (E).

Résolvons (E).

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} a & + & 3b & = 0 \\ -2a & + & b & = 0 \end{array} \right. .$$

équivaut successivement à

$$\left\{ \begin{array}{rcrll} a & + & 3b & = 0 & \\ & & 5b & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrll} a & + & 3b & = 0 & \\ & & b & = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrll} a & & & = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ & & b & = 0 & \end{array} \right.$$

Le système admet une unique solution $(0,0)$.

(e) X et Y sont-ils colinéaires ?

Démontrons que X et Y ne sont pas colinéaires.

* Première méthode : la seule combinaison linéaire nulle est celle dont les coefficients sont nuls.

  Nous avons démontré à la question précédente que pour $a \cdot X + b \cdot Y = 0$ il faut que $a = b = 0$.

  Autrement dit il est impossible de trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul et tel que $\lambda \cdot X = Y$ ou $X = \lambda Y$.

  $$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas colinéaires.}}$$

* Deuxième méthode : calcul du déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

  $$\begin{aligned}\det(X,Y) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - (-2) \times 3 \\ &= 7\end{aligned}$$

  $\det(X,Y) \neq 0$ donc

  $$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas colinéaires.}}$$

* Troisième méthode : s'assurer qu'il n'y a pas de proportionnalité entre les coordonnées de X et Y.

5. Démontrez que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

   Démontrons que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

   Au moins deux procédés :

   — Montrer qu'il existe un vecteur non nul qui engendre F. Et puisque $X \in F \setminus \{0\}$ il faudrait montrer que tous les éléments de F peuvent s'écrire $t \cdot X$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   — En utilisant le fait les seuls sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles.

   D'après les questions précédentes, F est un sous-espace vectoriel qui n'est pas $\{0\}$ (puisqu'il contient le vecteur non nul X) ni $\mathbb{R}^2$ (puisqu'il ne contient pas le vecteur Y) donc, forcément,

   $$\boxed{F \text{ est une droite vectorielle de } \mathbb{R}^2.}$$

6. Déterminez une représentation paramétrique de F.

Déterminons une représentation paramétrique de F.

D'après ce qui précède $F\{t \cdot X \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ donc

$$\boxed{F : \left\{ \begin{array}{rcr} m_1 & = & t \\ m_2 & = & -2t \end{array} \right. ,t \in \mathbb{R}}$$

Exercice 7.

Partie A : une équation.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculez $f(0)$.

$f(0) = 1 + \ln(1 + 0)$

$$\boxed{f(0) = 1.}$$

2. Étudiez les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Étudions les variations de f sur $[0; +\infty[$.

* Calcul de la dérivée.
  ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f l'est sur $[0; +\infty[$ en tant que fonction composée.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

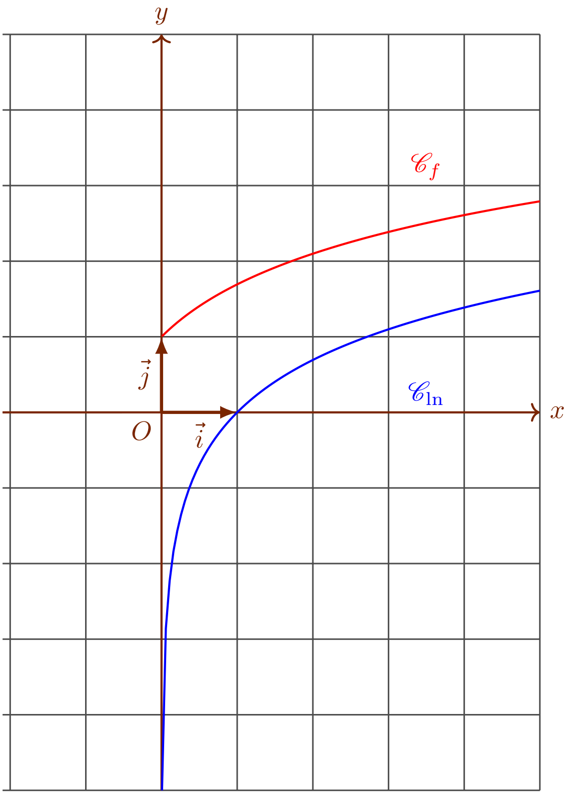
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

* Étude du signe de la dérivée et variations de la fonction.
  Clairement $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc f est strictement croissante.

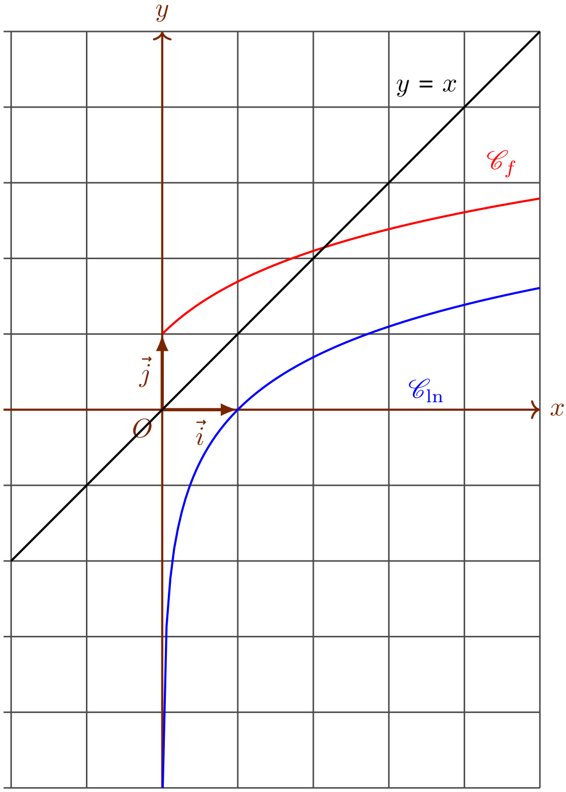
* Limites aux bornes du domaine de définition.
Clairement, par composition, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) En admettant que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f peut être déduite de celle de la fonction ln par deux translations, l'une de vecteur $-\vec{i}$ puis l'autre de vecteur $\vec{j}$ dessinez à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction ln puis celle de $\mathscr{C}$ sur l'**annexe 1**.



(b) Dessinez sur l'**annexe 1** la droite d'équation $y = x$ également appelée première bissectrice.



(c) D'après le graphique combien de solutions l'équation $f(x) = x$ semble-t-elle admettre dans $[0, +\infty[$.

Nous admettons que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution notée α et que $\alpha \in [1;3]$.

d'après le graphique il semble que

l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.

Partie B : approcher α.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$.

1. On souhaite justifier que la suite (u_n) est bien définie. Pour cela il faut établir que $[0, +\infty[$ est stable par f.
   Démontrez que si $x \in [0, +\infty[$ alors $f(x) \in [0, +\infty[$.

   Démontrons l'implication : si $x \in [0, +\infty[$ alors $f(x) \in [0, +\infty[$.

   Soit $x \geqslant 0$.
   Puisque f est croissante sur $[0, +\infty[$

   $$f(x) \geqslant f(0)$$

   Or $f(0) = 1$ donc
   $$f(x) \geqslant 1 \geqslant 0.$$

   $$\boxed{\text{Nous avons démontré que } [0, +\infty[\text{ est stable par } f.}$$

2. Démontrez par récurrence, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Démontrons par récurrence que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   * $u_0 = 1$ et $f(u_0) = f(1) = 1 + \ln(2) \geqslant 1$ car $\ln(2) > 0$.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_{n+1} \geqslant u_n$.
     f est croissante sur $[0; +\infty[$ (et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant 0$) donc

     $$f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$$
     $$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

   * On a démontré par récurrence que

   $$\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$$

3. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

   Par une récurrence immédiate $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par $u_0 = 1$:

   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 1.}$$

4. Démontrez que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

   Démontrons l'encadrement proposé.

   Pour démontrer cet encadrement nous allons établir chaque inégalité séparément.

   * Nous avions déjà remarqué que $f' > 0$ donc a fortiori $f' \geqslant 0$.
   * Soit $x \geqslant 1$.
     Donc

     $$1 + x \geqslant 2$$

     Et puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

     $$\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$$

   $$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \tfrac{1}{2}.}$$

5. D'après l'inégalité des accroissements finis (que nous n'avons pas encore étudiée et que nous admettrons) le résultat précédent permet d'affirmer que :

   $$|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - \alpha|$$

   pour tout $x \in [1, +\infty[$.
   Déduisez-en que, pour tout entier naturel n, on a

   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

   Rappelons que α est solution de l'équation $f(x) = x$.

En choisissant $x = u_n$ dans l'inégalité proposée :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc

$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \tfrac{1}{2}|x - \alpha|.}$$

6. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

* $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$.
* D'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\tfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.}$$

7. Démontrez que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précisez sa limite.

$0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit, d'après le théorème des gendarmes que $(|u_n - \alpha|)$ converge vers 0.
Finalement

$$\boxed{(u_n - \alpha) \text{ converge vers } 0.}$$

8. Déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.}$$

9. Expliquez en quoi l'on peut dire que (u_n) est une suite de valeurs approchées de α.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ signifie que la valeur de u_n se rapproche de celle de α lorsque n grandi.

10. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Puis expliquez comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près de α.
Rappelons que $\alpha \in [1;3]$.

Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

* D'une part : D'après la question 6 :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

* D'autre part

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 1 - u_0 &\leqslant \alpha - u_0 \leqslant 3 - u_0 \\ 0 &\leqslant \alpha - u_0 \leqslant 2 \end{aligned}$$

Donc

$$|u_0 - \alpha| \leqslant 2$$

Nous en déduisons

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

Déterminons n.

Pour que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ il suffit que $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-3}$.
Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-3} &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leqslant \ln\left(10^{-3}\right)\\ &\Longleftrightarrow -(n-1)\ln(2) \leqslant -3\ln(10)\end{aligned}$$

$$n \geqslant 1 + 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

> pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près l faut utiliser u_n avec $n \geqslant 1 + 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)}$.

Fin du sujet A.

Exercice 8.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\[2ex] v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

1. (a) Démontrez que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique.

$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{6}$

> $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de terme initial $v_0 - u_0 = 12$.

(b) Déduisez-en sa limite.

$-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc

$$\boxed{v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

2. Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Que pouvez-vous en déduire ?

* Nous avons déjà démontré que $v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
* $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
  Or $(v_n - u_n)$ est géométrique donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \times \frac{12}{6^{n+1}} \geqslant 0$.
  Donc (u_n) est croissante.
* $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(v_n - u_n) = -\frac{1}{2} \times \frac{12}{6^{n+1}} \leqslant 0$.
  Donc (v_n) est décroissante.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$$

3. (a) Démontrez que la suite $(2u_n + 3v_n)$ est constante.

Si elle est constante alors tous les termes égalent le premier $2u_0 + 3v_0 = 2 \times 0 + 3 \times 12 = 36$.

Démontrons par récurrence que $2u_n + 3v_n = 36$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $2u_0 + 3v_0 = 2 \times 0 + 3 \times 12 = 36$.
*

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} + 3v_{n+1} &= 2\frac{u_n + v_n}{2} + 3\frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= 2u_n + 3v_n \\ &= 36 \end{aligned}$$

(b) Déduisez-en la limite des suites (u_n) et (v_n).

Elles convergent vers la même limite ℓ qui doit vérifier $2\ell + 3\ell = 36$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers } \frac{36}{5}.}$$

Exercice 9.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Cet exercice est consacré à l'étude de la famille de fonctions f_n.

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}.$$

Étudiez le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminez le signe de h_n sur $]-1,+\infty[$.

$h_n'(x) = \frac{nx+n+1}{(1+x)^2}$.

$h_n'(x) > 0 \iff x > -\frac{n+1}{n}$.

Donc h_n est strictement croissante.

Comme $h_n(0) = 0$ on en déduit

x	-1		0		$+\infty$
h_n	||	$-$	0	$+$	

2. (a) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ vérifiez que :

$$f_1'(x) = h_1(x)$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x).$$

(b) On suppose n impair. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, justifiez que $f_n'(x)$ et h_n sont de même signe.

Dressez alors le tableau de variations de la fonction f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

Si n est impair alors $n-1$ est pair : $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$. Donc $x \mapsto \left(x^2\right)^k$ est positive donc f_n' est du signe de h_n.

x	-1		0		$+\infty$
h_n	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_n	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variation de f_n en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

x	-1		0		$+\infty$
$x^{n-1}h_n$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
f_n	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	$+\infty$

3. (a) Étudiez la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x) \\ &= x(1-x)\ln(1+x) \end{aligned}$$

x	-1		0		1		$+\infty$
$f_1(x) - f_2(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	0	$-$	

(b) Tracez ces deux courbes sur l'**annexe 2**.

Exercice 10.

On considère la suite (u_k) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{2}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k+2}.$$

   On met au même dénominateur.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   (a) Démontrez que

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right).$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)
\end{aligned}$$

   (b) Déduisez-en (avec un télescopage) que $S_n = 1 - \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

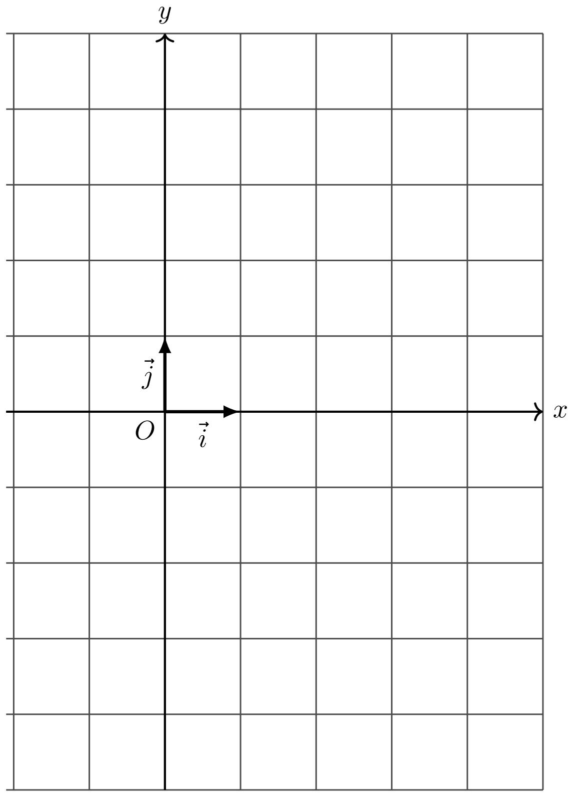
$$\begin{aligned}
S_n &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 2\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\
&= 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

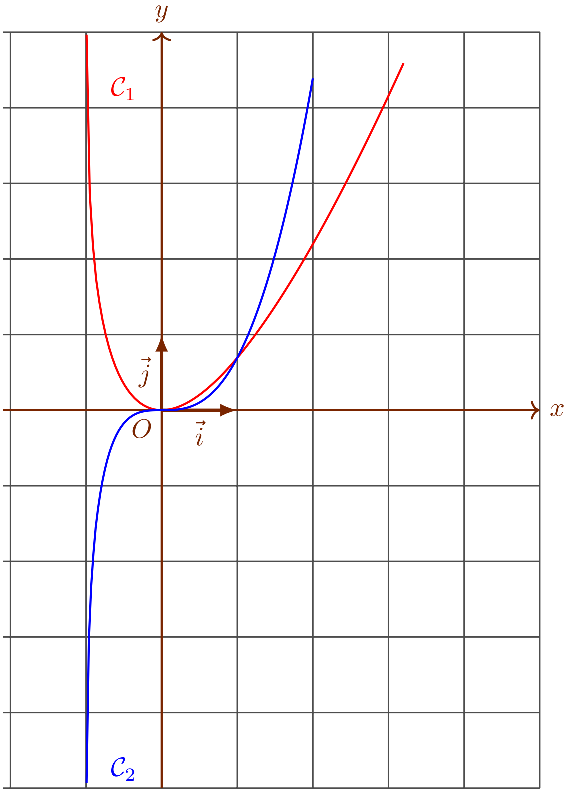
(c) Calculez la limite de la suite (S_n).

$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Fin du sujet B.

Annexe 1 : courbes représentatives de $\ln$ et f.





y
$\mathcal{C}_1$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
x
$\mathcal{C}_2$

Annexe 2 : courbes représentatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.