Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/09/08.

Exercice 1 : calcul numérique.

1. Donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\dfrac{12}{3} - \dfrac{37}{3}$. b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5}$. c) $\dfrac{6}{5} \times \dfrac{7}{8}$. d) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}$.

2. (a) Calculez $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$ et $\sqrt{36}$.

   (b) Quelle règle générale sur les racines carrées le précédent résultat illustre-t-il ?

   (c) Calculez $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$.

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où a et n sont des nombres entiers. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $A = 3^2 \times 3^4 \times 3^2$. b) $B = \dfrac{7^{12} \times 7^{28}}{7^{30}}$

   c) $C = 13^2 \times 13^{-15}$. d) $D = \dfrac{17^2 \times 17^{-15}}{\left(17^{-6}\right)^2 \times 17^{-2}}$.

Exercice 2 : calcul littéral.

Dans cet exercice aucune justification n'est exigée.

1. Développez les expressions suivantes.

   a) $M(x) = 2(x+3)$. b) $N(x) = 3(3x-1)$.

   c) $P(x) = (-2x+3)(7x-4)$. d) $Q(x) = (3x-7)^2$.

   e) $R(x) = -2(x-3)(2x-5)$. f) $S(x) = -(x-2)(x+1)^2$.

2. Factorisez les expressions suivantes.

   a) $T(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$. b) $U(x) = 9x^2 - 6x + 1$.

   c) $V(x) = x^2 - 7$. d) $W(x) = (x+2)(x^2-4) - x - 2$.

Exercice 3 : fonction de référence.

Complétez la "fiche d'identité" de la fonction inverse donnée en Annexe 1.

Exercice 4 : formule explicite par récurrence.

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Démontrez que la suite (u_n) peut s'exprimez à l'aide de la formule explicite

$$u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

pour tout entier naturel n.

Exercice 5 : étude d'une suite.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ une fonction.

1. Rappelez les formules de dérivation pour les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $u \times v$ et $\frac{u}{v}$ où u et v désignent des fonctions.
2. (a) Donnez, en justifiant, le domaine de définition de f.

   (b) Calculez f', la dérivée de f, en précisant son domaine de dérivabilité.

   (c) Étudiez, si vous l'avez déjà appris au lycée, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (d) Étudiez le signe de f' et déduisez-en le tableau de variation de f.
3. On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   Notons (R_n) la suite définie par récurrence par

   $$R_{n+1} = \frac{R_n + 2}{R_n + 1},$$

   où $n \in \mathbb{N}$ et $R_0 = 2$.

   (a) Démontrez l'encadrement valable pour tout entier naturel n :

   $$1 \leqslant R_n \leqslant 2.$$

(b) Justifiez que si (R_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors forcément ℓ vérifie :

$$\ell(\ell+1) = \ell + 2.$$

(c) Déduisez-en que si (R_n) admet une limite ce ne peut être que $\sqrt{2}$.

4. Introduisons une suite auxiliaire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{R_n - \sqrt{2}}{R_n + \sqrt{2}}.$$

(a) *Ne faites pas cette question avant d'avoir fini d'explorer tout le sujet. Vous admettrez la conclusion pour pouvoir faire les questions suivantes.* Démontrez que (a_n) est une suite géométrique de terme initial $a_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

(b) En admettant que la raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ vérifie $-1 < q < 0$ déterminez la limite de (a_n).

(c) Concluez quant à la convergence de (R_n).

Problème : suite de Fibonacci.

On s'intéresse dans cet exercice à la suite dite de Fibonacci qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\star).$$

I Premiers pas avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculez F_2, F_3, F_4, F_5.

2. Démontrez, par une récurrence double, que les termes de la suite de Fibonacci sont tous positifs.

3. En remarquant que, pour $n \geqslant 1$, la relation $(\star)$ peut s'écrire

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

déduisez de la question précédente le sens de variation de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II Le nombre d'or φ.

4. On souhaite dans cette question chercher des suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence $(\star)$.

   (a) Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrez que, si la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(\star)$ alors q est solution de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$.

   (b) Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Vous noterez φ la plus grande solution et α la plus petite.

5. Dans cette question on étudie les nombres $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ obtenus à la question précédente.

   (a) Justifiez que $1 < \varphi < 5$.

   (b) Démontrez que $\alpha = 1 - \varphi$.

   (c) Justifiez, grâce à la question 4, que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

   (d) Déduisez-en que : $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

   (e) Déduisez-en que $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$.

6. On s'intéresse dans cette question aux puissances de φ.
   Rappelons que nous avons établi que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Autrement dit φ^2 est de la forme $a + b\varphi$, avec a et b des entiers, puisque $\varphi^2 = 1 + 1 \times \varphi$.

   (a) Écrivez φ^3, φ^4, φ^5 sous la forme $a + b\varphi$ où a et b sont des nombres entiers.

   (b) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi.$$

III Une formule explicite.

7. Dans cette question on souhaite donner une expression explicite du terme général de la suite de Fibonacci. Pour cela on part d'une suite inspirée des questions précédentes :
$$v_n = \lambda\varphi^n + \mu\alpha^n,$$
définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où λ et μ sont des nombres réels que nous déterminerons ci-après.

   (a) Démontrez que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $(\star)$.

   (b) Démontrez que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = -\mu$.
   Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_0 = 0$.

   (c) Déduisez-en que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_1 = 1$.

Dorénavant on pose, pour tout entier naturel n :
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
On pourra aussi l'écrire
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

   (d) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n
$$F_n = v_n.$$

IV Étude asymptotique de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$
et que $-1 < \alpha < 0$.

8. Étudiez la convergence de (F_n).
Vous pourrez utiliser le résultat de la question 5.(a)

V Somme des termes de la suite de Fibonacci.

9. Dans cette question on souhaite calculer la somme S_n des termes de la suite de Fibonacci jusqu'au rang n :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i.$$

   (a) Écrivez $\sum_{i=0}^{5} F_i$ avec le symbole d'addition usuel +.

   (b) Calculez S_0, S_1, S_2.

   (c) En utilisant l'expression de F_n trouvée à la question précédente (c'est-à-dire v_n), montrez que, pour tout entier naturel n

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \varphi^i\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right).$$

   (d) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} - \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right].$$

Annexe : fiche d'identité de la fonction inverse.

Expression algébrique :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} ..... & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ..... \end{array} \right.$$

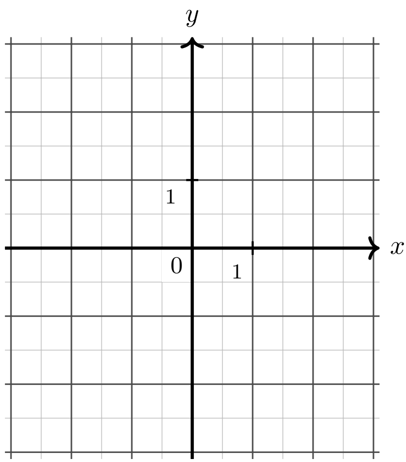
La fonction inverse est dérivable sur ..... et pour tout x pris dans cet ensemble

$$f'(x) = ...$$

Complétez le tableau de valeurs suivant (avec des écritures décimales pas fractionnaires).

x	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2
$f(x)$						

Complétez le graphique suivant en plaçant les points de coordonnées $(x, f(x))$ obtenues dans le tableau de valeurs.



Puis tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction inverse.

Tableau de variation :

x	
f	

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-$	||	$+$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée

.....

Parité : la fonction inverse est

.....