# Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/09/08.

## Exercice 1 : calcul numérique.

1. a) $-\frac{25}{3}$. b) $\frac{16}{15}$. c) $\frac{21}{20}$. d) $\frac{1}{4}$.

2. (a) D'une part :

$$\begin{aligned}\sqrt{4}\times\sqrt{9} &= \sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\\ &= 2\times 3\\ &= 6\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}\sqrt{36} &= \sqrt{6^2}\\ &= 6\end{aligned}$$

(b) Si $a$ et $b$ sont des nombres positifs alors : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.

(c)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\times\sqrt{8} &= \sqrt{2\times 8}\\ &= \sqrt{16}\\ &= \sqrt{4^2}\\ &= 4\end{aligned}$$

3. a)

$$\begin{aligned}A &= 3^2\times 3^4\times 3^2\\ &= 3^{2+4+2}\\ &= 3^8\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}B &= \frac{7^{12}\times 7^{28}}{7^{30}}\\ &= \frac{7^{12+28}}{7^{30}}\\ &= \frac{7^{40}}{7^{30}}\\ &= 7^{10}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= 13^2 \times 13^{-15} \\ &= 13^{2-15} \\ &= 13^{-13} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= \frac{17^2 \times 17^{-15}}{\left(17^{-6}\right)^2 \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{2-15}}{17^{-6\times 2} \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{-13}}{17^{-12} \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{-13}}{17^{-12-2}} \\ &= 17^{-13} \times 17^{14} \\ &= 17^{-13+14} \\ &= 17^1 \\ &= 17 \end{aligned}$$

## Exercice 2 : calcul littéral.

1. a)

$$\begin{aligned} M(x) &= 2 \times x + 2 \times 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} N(x) &= 3 \times 3x - 3 \times 1 \\ &= 9x - 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x \times 7x + (-2x) \times (-4) + 3 \times 7x + 3 \times (-4) \\ &= -14x^2 + 8x + 21x - 12 \\ &= -14x^2 + 29x - 12 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} Q(x) &= (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 7 + 7^2 \\ &= 3^2 \times x^2 - 2 \times 3 \times 7 \times x + 49 \\ &= 9x^2 - 42x + 49 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} R(x) &= -2\,[x \times 2x + x \times (-5) + (-3) \times 2x + (-3) \times (-5)] \\ &= -2\left[2x^2 - 5x - 6x + 15\right] \\ &= -2\left[2x^2 - 11x + 15\right] \\ &= -2 \times 2x^2 + (-2) \times (-11x) + (-2) \times 15 \\ &= -4x^2 + 22x - 30 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
S(x) &= -(x-2)\left(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2\right) \\
&= -(x-2)(x^2 + 2x + 1) \\
&= -\left[x \times x^2 + x \times 2x + x \times 1 + (-2) \times x^2 + (-2) \times 2x + (-2) \times 1\right] \\
&= -\left[x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2\right] \\
&= -\left[x^3 - 3x - 2\right] \\
&= -x^3 + 3x + 2
\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
T(x) &= x \times x^2 + x \times 2x + x \times 3 \\
&= x \times (x^2 + 2x + 3)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
U(x) &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1^2 \\
&= (3x-1)^2
\end{aligned}$$

c)

$$V(x) = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

d)

$$\begin{aligned} W(x) &= (x+2)\times(x^2-4)-(x+2)\times 1 \\ &= (x+2)\times\left[(x^2-4)-2\right] \\ &= (x+2)(x^2-4x+1) \end{aligned}$$

## Exercice 3 : fonction de référence.

## Exercice 4 : formule explicite par récurrence.

Notons $\mathscr{P}(n)$ : « $u_n = \frac{1}{2}\times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

* Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Autrement dit il faut établir l'égalité $u_0 = \frac{1}{2}\times 3^{0+1} - \frac{1}{2}$.
  D'une part : $u_0 = 1$,
  d'autre part : $\frac{1}{2}\times 3^{0+1} - \frac{1}{2} = 1$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
* Hérédité.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  Nous devons démontrer l'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{2}\times 3^{(n+1)+1} - \frac{1}{2}$ *i.e.* $u_{n+1} = \frac{1}{2}\times 3^{n+2} - \frac{1}{2}$.
  Pour démontrer cette égalité nous partons du membre de gauche.
  D'après la formule de récurrence définissant $(u_n)$ :

$$u_{n+1} = 3u_n + 1$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = \frac{1}{2}\times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\times\left(\frac{1}{2}\times 3^{n+1} - \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 3\times\frac{1}{2}\times 3^{n+1} - 3\times\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\times 3\times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\times 3^{n+2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{le terme général de la suite } (u_n) \text{ est donné par } u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}.}$$

## Exercice 5 : étude d'une suite.

1. La dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.
   La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
   $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

2. (a) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ hormis la valeur qui annule son dénominateur à savoir $-1$ donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

   (b) Déterminons $f'$.

   $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x + 1$.
   Puisque $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et puisque $v$ s'annule en $-1$, $f$ est dérivable sur

$$\boxed{\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

   De plus :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

   Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathscr{D}_{f'}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - (x+2) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x + 1 - x - 2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_{f'},\ f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.}$$

(c) * $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$.

* De même : $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$.

* $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} x + 1 = 0^+$ et $\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$ donc $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$.

* De même $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{x+2}{x+1} = -\infty$.

(d) $f$' est un quotient : son dénominateur est positif et son numérateur strictement positif. Donc

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\|$ | $-$ |
| $f$ | $1 \searrow -\infty$ | $\|$ | $+\infty \searrow 1$ |

3. (a) Procédons par récurrence. Notons $\mathscr{Q}(n)$ : « $1 \leqslant R_n \leqslant 2$ ».
L'initialisation est évidente passons à l'hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. et démontrons que $\mathscr{Q}(n+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence : $1h \leqslant R_n \leqslant 2$.
Or $f$ est décroissante sur $[1;2]$ donc

$$f(1) \geqslant f(R_n) \geqslant f(2).$$

Comme $f(1) = \frac{3}{2} \leqslant 2$ et $f(2) = \frac{4}{3} \geqslant 1$ nous avons

$$2 \geqslant f(R_n) \geqslant 1.$$

Enfin de $f(R_n) = R_{n+1}$ nous déduisons

$$1 \leqslant R_{n+1} \leqslant 2.$$

Autrement dit $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

(b) Nous savons que la formule de récurrence est vraie : $R_{n+1} = \frac{R_n+2}{R_n+1}$.
Donc :

$$\begin{aligned} R_{n+1} \times (Rn+1) &= \frac{R_n+2}{R_n+1} \times (R_n+1) \\ R_{n+1} \times (R_n+1) &= R_n+2 \end{aligned}$$

Puisque $(R_n)$ est supposée converger vers $\ell$ et puisque $x \mapsto x(x+1)$ et $x \mapsto x+2$ sont continues, en passant à la limite dans la précédente égalité :

$$\boxed{\ell(\ell+1) = \ell+2.}$$

(c) D'après la question précédente $\ell$ devrait être solution de

$$x(x+1) = x+2.$$

Or cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} x \times x + x \times 1 &= x+2 \\ x^2 + x &= x+2 \\ x^2 + x - x - 2 &= x + 2 - x - 2 \\ x^2 - 2 &= 0 \\ x^2 - \sqrt{2}^2 &= 0 \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) &= 0 \\ x = \sqrt{2} &\quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente $R_n \in [1;2]$ donc

$$\boxed{\text{la seule limite possible est } \sqrt{2}.}$$

4. (a) *

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{R_0 - \sqrt{2}}{R_0 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{R_{n+1}-\sqrt{2}}{R_{n+1}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{\frac{R_n+2}{R_n+1}-\sqrt{2}}{\frac{R_n+2}{R_n+1}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{R_n+2-\sqrt{2}(R_n+1)}{R_n+2+\sqrt{2}(R_n+1)}\\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n+2-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})R_n+2+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n+\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times 1}{(1+\sqrt{2})R_n+\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 1}\\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n-\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}+1)}{(1+\sqrt{2})R_n+\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)}\\
&= \frac{(1-\sqrt{2})(R_n-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(R_n+\sqrt{2})}\\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}}\times\frac{R_n-\sqrt{2}}{R_n+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}}\times a_n
\end{aligned}$$

$(a_n)$ est géométrique de terme initial $a_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

(b) Puisque la raison $q$ de la suite géométrique $(a_n)$ vérifie $-1 < q < 1$

$(a_n)$ converge vers 0.

(c) Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $R_n \geqslant 0$ nécessairement $R_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

# Problème : suite de Fibonacci.

## I Premiers pas avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

et de même ensuite.

$$\boxed{F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3 \text{ et } F_5 = 5.}$$

2. Notons $\mathscr{R}(n)$ : « $F_n \geqslant 0$ ».

Démontrons par une récurrence double que $\mathscr{R}(n)$ est vraie.

* $F_0 = 0 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 0$.
  Donc $\mathscr{R}(0)$ et $\mathscr{R}(1)$ sont vraies.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{R}(n)$ et $\mathscr{R}(n+1)$ sont vraies.
  Démontrons qu'alors $\mathscr{R}(n+2)$ est vraie.
  D'après notre hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} F_n \geqslant 0 \\ F_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

  donc, en sommant terme à terme les inégalités :

$$F_n + F_{n+1} \geqslant 0 + 0.$$

  Or la formule de récurrence définissant la suite $(F_n)$ est $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ donc

$$F_{n+2} \geqslant 0.$$

  Ainsi $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence sur $n$ que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \geqslant 0.}$$

3. Étudions la monotonie de $(F_n)$.

   * Soit $n \geqslant 1$ un entier.
   De
   $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$
   nous déduisons
   $$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$
   Or d'après la question précédente $F_{n-1} \geqslant 0$ donc
   $$F_{n+1} - F_n \geqslant 0.$$

   * $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donc $F_0 \leqslant F_1$.

   Nous avons démontré que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} - F_n \geqslant 0.$$

   $$\boxed{(F_n) \text{ est croissante.}}$$

## II Le nombre d'or $\varphi$.

4. (a) Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $(\star)$.

   Démontrons que $q$ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$.

   Puisque la suite vérifie la relation $\star$ nous avons :
   $$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

   Ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} q^{n+2} - q^{n+1} - q^n &= q^{n+1} + q^n - q^{n+1} - q^n \\ q^n \times q^2 - q^n \times q - q^n \times 1 &= 0 \\ q^n \times \left(q^2 - q - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $q > 0$ :

$$\frac{q^n(q^2 - q - 1)}{q^n} = \frac{0}{q^n}$$

On a bien : $q^2 - q - 1 = 0.$

(b) Déterminons les racines du trinôme : $X^2 - X - 1$.

Pas de racine évidente nous calculons donc le discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)\\ &= 5\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - X - 1$ admets deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1}\\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5. (a) Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ nous avons

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}.$$

*i.e.*

$$2 < \sqrt{5} < 3.$$

Nous en déduisons

$$1+2 < 1+\sqrt{5} < 1+3.$$

Et puisque $2 > 0$ :

$$\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{4}{2}.$$

Finalement :

$$\boxed{1 < \varphi < 5.}$$

(b) On doit démontrer une égalité : on part d'un côté pour arriver à l'autre. Je pars du calcul.

$$\begin{aligned} 1-\varphi &= 1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2-\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{5}}{2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{1-\varphi = \alpha.}$$

(c) Puisque $\varphi$ est solution de $x^2-x-1=0$ nous avons

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

$$\varphi^2-\varphi-1+\varphi+1 = 0+\varphi+1$$

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1.}$$

(d) D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi &= \varphi + 1 - \varphi \\ \varphi^2 - \varphi &= 1 \end{aligned}$$

Puisque $\varphi > 1 > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi} &= \frac{1}{\varphi} \\ \frac{\varphi^2}{\varphi} - \frac{\varphi}{\varphi} &= \frac{1}{\varphi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.}$$

(e) Se déduit immédiatement des (b) et (d)

6. (a) *

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= \varphi \times \varphi^2 \\ &= \varphi(1 + \varphi) \\ &= \varphi \times \varphi + \varphi \times 1 \\ &= \varphi^2 + \varphi \\ &= (1 + \varphi) + \varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^3 = 1 + 2\varphi.}$$

*

$$\begin{aligned} \varphi^4 &= \varphi(1 + 2\varphi) \\ &= \varphi + 2\varphi^2 \\ &= \varphi + 2(1 + \varphi) \\ &= \varphi + 2 + 2\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^4 = 2 + 3\varphi.}$$

*

$$\begin{aligned}\varphi^5 &= \varphi(2+3\varphi)\\ &= 2\varphi + 3\varphi^2\\ &= 2\varphi + 3(1+\varphi)\\ &= 2\varphi + 3 + 3\varphi\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^5 = 3 + 5\varphi.}$$

(b) Démonstration par récurrence.

* $\varphi^2 = 1 + \varphi$ or $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ donc $\varphi^2 + F_1 + F_2\varphi$.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$.

$$\varphi^{n+1} = \varphi \times \varphi^n$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} &= \varphi(F_{n-1} + F_n\varphi)\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n\varphi^2\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n(1+\varphi)\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n + \varphi F_n\\ &= (F_{n-1} + F_n)\varphi + F_n\end{aligned}$$

D'après la formule de récurrence définissant $(F_n)$ :

$$\varphi^{n+1} = F_{n+1}\varphi + F_n$$

# III Une formule explicite.

7. (a)

$$\begin{aligned} v_{n+1}+v_n &= \lambda\varphi^{n+1}+\mu\alpha^{n+1}+\lambda\varphi^n+\mu\alpha^n \\ &= \lambda(\varphi^{n+1}+\varphi^n)+\mu(\alpha^{n+1}+\alpha^n) \\ &= \lambda\varphi^{n+2}+\mu\alpha^{n+2} \\ &= v_{n+2} \end{aligned}$$

(b) Si $v_0 = 0$ alors

$$\begin{aligned} \lambda\varphi^0+\mu\alpha^0 &= 0 \\ \lambda+\mu &= 0 \\ \lambda &= -\mu \end{aligned}$$

(c)

$$\lambda\varphi+\mu\alpha = 1$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\lambda\varphi-\lambda\alpha = 0$$

Comme de plus $\alpha = 1-\varphi$ :

$$\begin{aligned} \lambda\varphi-\lambda(1-\varphi) &= 1 \\ \lambda(2\varphi-1) &= 1 \\ \lambda\left(2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right) &= 1 \\ \lambda\sqrt{5} &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}.}$$

(d) En procédant à une récurrence double immédiate.

## IV Étude asymptotique de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Puisque $-1 < \alpha < 1$ :
$$\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Puisque $\varphi > 1$ :
$$\varphi^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Finalement
$$\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

## V Somme des termes de la suite de Fibonacci.

9. (a)
$$\boxed{\sum_{i=1}^{5} F_i = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5.}$$

(b) *
$$\begin{aligned} S_0 &= F_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*
$$\begin{aligned} S_1 &= F_0 + F_1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

*
$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + F_2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n\right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n\right] - \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^i\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi^i\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha^n\right) \end{aligned}$$

(d) On reconnaît la somme des termes de deux suites géométriques :

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi^i = \frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} \text{ et } \sum_{i=0}^{n}\alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

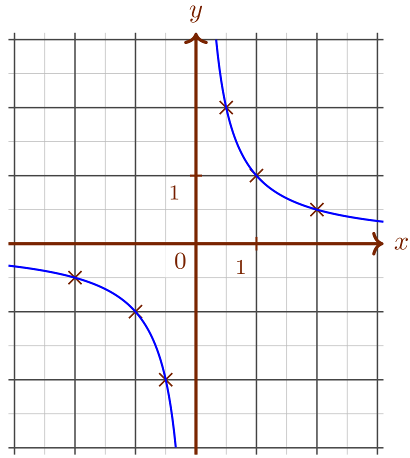
## Annexe : fiche d'identité de la fonction inverse.

| Expression algébrique : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ | La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x$ pris dans cet ensemble $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ |
|---|---|

Complétez le tableau de valeurs suivant (avec des écritures décimales pas fractionnaires).

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0{,}5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0{,}5$ | $-1$ | $-2$ | $2$ | $1$ | $0{,}5$ |

Complétez le graphique suivant en plaçant les points de coordonnées $(x, f(x))$ obtenus dans le tableau de valeurs.




Puis tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction inverse.

Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ |
| $f$ | $0 \searrow -\infty$ | $\Vert$ | $+\infty \searrow 0$ |

Tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ |

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une hyperbole.

Parité : la fonction inverse est impaire.