Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/09/08.

Exercice 1 : calcul numérique.

1. Donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\dfrac{12}{3} - \dfrac{37}{3}$. b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5}$. c) $\dfrac{6}{5} \times \dfrac{7}{8}$. d) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}$.

   a) $-\frac{25}{3}$. b) $\frac{16}{15}$. c) $\frac{21}{20}$. d) $\frac{1}{4}$.

2. (a) Calculez $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$ et $\sqrt{36}$.

   D'une part :

   $$\begin{aligned}\sqrt{4} \times \sqrt{9} &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

   d'autre part :

   $$\begin{aligned}\sqrt{36} &= \sqrt{6^2} \\ &= 6\end{aligned}$$

   (b) Quelle règle générale sur les racines carrées le précédent résultat illustre-t-il ?

   Si a et b sont des nombres positifs alors : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

   (c) Calculez $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$.

   $$\begin{aligned}\sqrt{2} \times \sqrt{8} &= \sqrt{2 \times 8} \\ &= \sqrt{16} \\ &= \sqrt{4^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où a et n sont des nombres entiers. *Aucune justification n'est exigée.*

a) $A = 3^2 \times 3^4 \times 3^2$.

b) $B = \dfrac{7^{12} \times 7^{28}}{7^{30}}$

c) $C = 13^2 \times 13^{-15}$.

d) $D = \dfrac{17^2 \times 17^{-15}}{(17^{-6})^2 \times 17^{-2}}$.

a)

$$\begin{aligned} A &= 3^2 \times 3^4 \times 3^2 \\ &= 3^{2+4+2} \\ &= 3^8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{7^{12} \times 7^{28}}{7^{30}} \\ &= \frac{7^{12+28}}{7^{30}} \\ &= \frac{7^{40}}{7^{30}} \\ &= 7^{10} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= 13^2 \times 13^{-15} \\ &= 13^{2-15} \\ &= 13^{-13} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} D &= \frac{17^2 \times 17^{-15}}{(17^{-6})^2 \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{2-15}}{17^{-6\times 2} \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{-13}}{17^{-12} \times 17^{-2}} \\ &= \frac{17^{-13}}{17^{-12-2}} \\ &= 17^{-13} \times 17^{14} \\ &= 17^{-13+14} \\ &= 17^1 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Exercice 2 : calcul littéral.

Dans cet exercice aucune justification n'est exigée.

1. Développez les expressions suivantes.

a) $M(x) = 2(x+3)$.

b) $N(x) = 3(3x-1)$.

c) $P(x) = (-2x+3)(7x-4)$.

d) $Q(x) = (3x-7)^2$.

e) $R(x) = -2(x-3)(2x-5)$.

f) $S(x) = -(x-2)(x+1)^2$.

a)

$$\begin{aligned} M(x) &= 2 \times x + 2 \times 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} N(x) &= 3 \times 3x - 3 \times 1 \\ &= 9x - 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x \times 7x + (-2x) \times (-4) + 3 \times 7x + 3 \times (-4) \\ &= -14x^2 + 8x + 21x - 12 \\ &= -14x^2 + 29x - 12 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} Q(x) &= (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 7 + 7^2 \\ &= 3^2 \times x^2 - 2 \times 3 \times 7 \times x + 49 \\ &= 9x^2 - 42x + 49 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
R(x) &= -2\,[x \times 2x + x \times (-5) + (-3) \times 2x + (-3) \times (-5)] \\
&= -2\left[2x^2 - 5x - 6x + 15\right] \\
&= -2\left[2x^2 - 11x + 15\right] \\
&= -2 \times 2x^2 + (-2) \times (-11x) + (-2) \times 15 \\
&= -4x^2 + 22x - 30
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
S(x) &= -(x-2)\left(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2\right) \\
&= -(x-2)(x^2 + 2x + 1) \\
&= -\left[x \times x^2 + x \times 2x + x \times 1 + (-2) \times x^2 + (-2) \times 2x + (-2) \times 1\right] \\
&= -\left[x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2\right] \\
&= -\left[x^3 - 3x - 2\right] \\
&= -x^3 + 3x + 2
\end{aligned}$$

2. Factorisez les expressions suivantes.
   a) $T(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$.
   b) $U(x) = 9x^2 - 6x + 1$.
   c) $V(x) = x^2 - 7$.
   d) $W(x) = (x+2)(x^2-4) - x - 2$.

a)

$$\begin{aligned}
T(x) &= x \times x^2 + x \times 2x + x \times 3 \\
&= x \times (x^2 + 2x + 3)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} U(x) &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1^2 \\ &= (3x-1)^2 \end{aligned}$$

c)

$$V(x) = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

d)

$$\begin{aligned} W(x) &= (x+2) \times (x^2 - 4) - (x+2) \times 1 \\ &= (x+2) \times \left[(x^2-4) - 2\right] \\ &= (x+2)(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

Exercice 3 : fonction de référence.

Complétez la "fiche d'identité" de la fonction inverse donnée en Annexe 1.

Exercice 4 : formule explicite par récurrence.

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

Démontrez que la suite (u_n) peut s'exprimez à l'aide de la formule explicite

$$u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

pour tout entier naturel n.

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

* Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Autrement dit il faut établir l'égalité $u_0 = \frac{1}{2} \times 3^{0+1} - \frac{1}{2}$.
  D'une part : $u_0 = 1$,
  d'autre part : $\frac{1}{2} \times 3^{0+1} - \frac{1}{2} = 1$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ st vraie.
* Hérédité.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  Nous devons démontrer l'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{(n+1)+1} - \frac{1}{2}$ *i.e.* $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times 3^{n+2} - \frac{1}{2}$.
  Pour démontrer cette égalité nous partons du membre de gauche.
  D'après la formule de récurrence définissant (u_n) :

$$u_{n+1} = 3u_n + 1$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - 3 \times \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 3^{n+2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

> le terme général de la suite (u_n) est donné par $u_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$.

Exercice 5 : étude d'une suite.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ une fonction.

1. Rappelez les formules de dérivation pour les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $u \times v$ et $\frac{u}{v}$ où u et v désignent des fonctions.

La dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.
La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

2. (a) Donnez, en justifiant, le domaine de définition de f.

f est définie sur $\mathbb{R}$ hormis la valeur qui annule son dénominateur à savoir -1 donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

(b) Calculez f', la dérivée de f, en précisant son domaine de dérivabilité.

Déterminons f'.

$f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x + 1$.
Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et puisque v s'annule en -1, f est dérivable sur

$$\boxed{\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

De plus :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Or $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathscr{D}_{f'}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - (x+2) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x + 1 - x - 2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_{f'},\ f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.}$$

(c) Étudiez, si vous l'avez déjà appris au lycée, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1.$
* De même : $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1.$
* $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1 = 0^+$ et $\lim_{x\to 1} x+2 = 3$ donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+2}{x+1} = +\infty.$
* De même $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x+2}{x+1} = -\infty.$

(d) Étudiez le signe de f' et déduisez-en le tableau de variation de f.

f' est un quotient : son dénominateur est positif et son numérateur strictement positif. Donc

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	$\|$	$-$
f	$1 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 1$

3. On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Notons (R_n) la suite définie par récurrence par

$$R_{n+1} = \frac{R_n + 2}{R_n + 1},$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $R_0 = 2$.

(a) Démontrez l'encadrement valable pour tout entier naturel n :

$$1 \leqslant R_n \leqslant 2.$$

Procédons par récurrence. Notons $\mathscr{Q}(n)$: « $1 \leqslant R_n \leqslant 2$ ».
L'initialisation est évidente passons à l'hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie. et démontrons que $\mathscr{Q}(n+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence : $1h \leqslant R_n \leqslant 2$.
Or f est décroissante sur $[1; 2]$ donc

$$f(1) \geqslant f(R_n) \geqslant f(2).$$

Comme $f(1) = \frac{3}{2} \leqslant 2$ et $f(2) = \frac{4}{3} \geqslant 1$ nous avons

$$2 \geqslant f(R_n) \geqslant 1.$$

Enfin de $f(R_n) = R_{n+1}$ nous déduisons

$$1 \leqslant R_{n+1} \leqslant 2.$$

Autrement dit $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

(b) Justifiez que si (R_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors forcément ℓ vérifie :

$$\ell(\ell+1) = \ell + 2.$$

Nous savons que la formule de récurrence est vraie : $R_{n+1} = \frac{R_n+2}{R_n+1}$. Donc :

$$\begin{aligned} R_{n+1} \times (Rn+1) &= \frac{R_n+2}{R_n+1} \times (R_n+1) \\ R_{n+1} \times (R_n+1) &= R_n + 2 \end{aligned}$$

Puisque (R_n) est supposée converger vers ℓ et puisque $x \mapsto x(x+1)$ et $x \mapsto x+2$ sont continues, en passant à la limite dans la précédente égalité :

$$\boxed{\ell(\ell+1) = \ell + 2.}$$

(c) Déduisez-en que si (R_n) admet une limite ce ne peut être que $\sqrt{2}$.

D'après la question précédente ℓ devrait être solution de

$$x(x+1) = x + 2.$$

Or cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} x \times x + x \times 1 &= x + 2 \\ x^2 + x &= x + 2 \\ x^2 + x - x - 2 &= x + 2 - x - 2 \\ x^2 - 2 &= 0 \\ x^2 - \sqrt{2}^2 &= 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0 \\ x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente $R_n \in [1;2]$ donc

$$\boxed{\text{la seule limite possible est } \sqrt{2}.}$$

4. Introduisons une suite auxiliaire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{R_n - \sqrt{2}}{R_n + \sqrt{2}}.$$

   (a) *Ne faites pas cette question avant d'avoir fini d'explorer* <u>*tout*</u> *le sujet. Vous admettrez la conclusion pour pouvoir faire les questions suivantes.*
   Démontrez que (a_n) est une suite géométrique de terme initial $a_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

   *

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{R_0 - \sqrt{2}}{R_0 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{R_{n+1} - \sqrt{2}}{R_{n+1} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{\frac{R_n+2}{R_n+1} - \sqrt{2}}{\frac{R_n+2}{R_n+1} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{R_n + 2 - \sqrt{2}(R_n+1)}{R_n + 2 + \sqrt{2}(R_n+1)} \\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n + 2 - \sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})R_n + 2 + \sqrt{2}} \\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n + \sqrt{2}\times\sqrt{2} - \sqrt{2}\times 1}{(1+\sqrt{2})R_n + \sqrt{2}\times\sqrt{2} + \sqrt{2}\times 1} \\
&= \frac{(1-\sqrt{2})R_n - \sqrt{2}\times(-\sqrt{2}+1)}{(1+\sqrt{2})R_n + \sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{(1-\sqrt{2})(R_n - \sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(R_n+\sqrt{2})} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}} \times \frac{R_n - \sqrt{2}}{R_n+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2}} \times a_n
\end{aligned}$$

(a_n) est géométrique de terme initial $a_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et de raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

(b) En admettant que la raison $q = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ vérifie $-1 < q < 0$ déterminez la limite de (a_n).

Puisque la raison q de la suite géométrique (a_n) vérifie $-1 < q < 1$

(a_n) converge vers 0.

(c) Concluez quant à la convergence de (R_n).

Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $R_n \geqslant 0$ nécessairement $R_n - \sqrt{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Autrement dit

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}.}$$

Problème : suite de Fibonacci.

On s'intéresse dans cet exercice à la suite dite de Fibonacci qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\star).$$

I Premiers pas avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculez F_2, F_3, F_4, F_5.

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

et de même ensuite.

$$\boxed{F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3 \text{ et } F_5 = 5.}$$

2. Démontrez, par une récurrence double, que les termes de la suite de Fibonacci sont tous positifs.

Notons $\mathscr{R}(n)$: « $F_n \geqslant 0$ ».

Démontrons par une récurrence double que $\mathscr{R}(n)$ est vraie.

* $F_0 = 0 \geqslant 0$ et $F_1 = 1 \geqslant 0$.
Donc $\mathscr{R}(0)$ et $\mathscr{R}(1)$ sont vraies.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{R}(n)$ et $\mathscr{R}(n+1)$ sont vraies.
  Démontrons qu'alors $\mathscr{R}(n+2)$ est vraie.
  D'après notre hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} F_n \geqslant 0 \\ F_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

  donc, en sommant terme à terme les inégalités :

$$F_n + F_{n+1} \geqslant 0 + 0.$$

  Or la formule de récurrence définissant la suite (F_n) est $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ donc

$$F_{n+2} \geqslant 0.$$

  Ainsi $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence sur n que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \geqslant 0.}$$

3. En remarquant que, pour $n \geqslant 1$, la relation $(\star)$ peut s'écrire

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

déduisez de la question précédente le sens de variation de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Étudions la monotonie de (F_n).

* Soit $n \geqslant 1$ un entier.
  De

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

  nous déduisons

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

  Or d'après la question précédente $F_{n-1} \geqslant 0$ donc

$$F_{n+1} - F_n \geqslant 0.$$

* $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donc $F_0 \leqslant F_1$.

Nous avons démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} - F_n \geqslant 0.$$

$$\boxed{(F_n) \text{ est croissante.}}$$

II Le nombre d'or φ.

4. On souhaite dans cette question chercher des suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence $(\star)$.

   (a) Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrez que, si la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(\star)$ alors q est solution de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$.

   Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $(\star)$.

   Démontrons que q est solution de $x^2 - x - 1 = 0$.

   Puisque la suite vérifie la relation $\star$ nous avons :

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n.$$

   Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} q^{n+2} - q^{n+1} - q^n &= q^{n+1} + q^n - q^{n+1} - q^n \\ q^n \times q^2 - q^n \times q - q^n \times 1 &= 0 \\ q^n \times \left(q^2 - q - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

   Puisque $q > 0$:

$$\frac{q^n(q^2 - q - 1)}{q^n} = \frac{0}{q^n}$$

   On a bien : $q^2 - q - 1 = 0$.

   (b) Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Vous noterez φ la plus grande solution et α la plus petite.

   Déterminons les racines du trinôme : $X^2 - X - 1$.

   Pas de racine évidente nous calculons donc le discriminant.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - X - 1$ admets deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times 1}\\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5. Dans cette question on étudie les nombres $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ obtenus à la question précédente.

   (a) Justifiez que $1 < \varphi < 5$.

   Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ nous avons

   $$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}.$$

   i.e.

   $$2 < \sqrt{5} < 3.$$

   Nous en déduisons

   $$1 + 2 < 1 + \sqrt{5} < 1 + 3.$$

   Et puisque $2 > 0$:

   $$\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{4}{2}.$$

   Finalement :

   $$\boxed{1 < \varphi < 5.}$$

(b) Démontrez que $\alpha = 1 - \varphi$.

On doit démontrer une égalité : on part d'un côté pour arriver à l'autre. Je pars du calcul.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi &= 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2-(1+\sqrt{5})}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{5}}{2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{1 - \varphi = \alpha.}$$

(c) Justifiez, grâce à la question 4, que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Puisque φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi - 1 &= 0 \\ \varphi^2 - \varphi - 1 + \varphi + 1 &= 0 + \varphi + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1.}$$

(d) Déduisez-en que : $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi &= \varphi + 1 - \varphi \\ \varphi^2 - \varphi &= 1 \end{aligned}$$

Puisque $\varphi > 1 > 0$:

$$\frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}$$
$$\frac{\varphi^2}{\varphi} - \frac{\varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\boxed{\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.}$$

(e) Déduisez-en que $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$.

Se déduit immédiatement des (b) et (d)

6. On s'intéresse dans cette question aux puissances de φ.
Rappelons que nous avons établi que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Autrement dit φ^2 est de la forme $a + b\varphi$, avec a et b des entiers, puisque $\varphi^2 = 1 + 1 \times \varphi$.

(a) Écrivez φ^3, φ^4, φ^5 sous la forme $a + b\varphi$ où a et b sont des nombres entiers.

*

$$\begin{aligned}\varphi^3 &= \varphi \times \varphi^2\\ &= \varphi(1+\varphi)\\ &= \varphi \times \varphi + \varphi \times 1\\ &= \varphi^2 + \varphi\\ &= (1+\varphi) + \varphi\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^3 = 1 + 2\varphi.}$$

*

$$\begin{aligned}\varphi^4 &= \varphi(1+2\varphi)\\ &= \varphi + 2\varphi^2\\ &= \varphi + 2(1+\varphi)\\ &= \varphi + 2 + 2\varphi\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^4 = 2 + 3\varphi.}$$

*

$$\begin{aligned}\varphi^5 &= \varphi(2+3\varphi)\\ &= 2\varphi + 3\varphi^2\\ &= 2\varphi + 3(1+\varphi)\\ &= 2\varphi + 3 + 3\varphi\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi^5 = 3 + 5\varphi.}$$

(b) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi.$$

Démonstration par récurrence.

* $\varphi^2 = 1 + \varphi$ or $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ donc $\varphi^2 + F_1 + F_2\varphi$.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$.

$$\varphi^{n+1} = \varphi \times \varphi^n$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} &= \varphi(F_{n-1} + F_n\varphi)\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n\varphi^2\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n(1+\varphi)\\ &= F_{n-1}\varphi + F_n + \varphi F_n\\ &= (F_{n-1} + F_n)\varphi + F_n\end{aligned}$$

D'après la formule de récurrence définissant (F_n) :

$$\varphi^{n+1} = F_{n+1}\varphi + F_n$$

III Une formule explicite.

7. Dans cette question on souhaite donner une expression explicite du terme général de la suite de Fibonacci. Pour cela on part d'une suite inspirée des questions précédentes :

$$v_n = \lambda\varphi^n + \mu\alpha^n,$$

définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où λ et μ sont des nombres réels que nous déterminerons ci-après.

(a) Démontrez que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $(\star)$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} + v_n &= \lambda\varphi^{n+1} + \mu\alpha^{n+1} + \lambda\varphi^n + \mu\alpha^n \\ &= \lambda(\varphi^{n+1} + \varphi^n) + \mu(\alpha^{n+1} + \alpha^n) \\ &= \lambda\varphi^{n+2} + \mu\alpha^{n+2} \\ &= v_{n+2} \end{aligned}$$

(b) Démontrez que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = -\mu$.
Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_0 = 0$.

Si $v_0 = 0$ alors

$$\begin{aligned} \lambda\varphi^0 + \mu\alpha^0 &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda &= -\mu \end{aligned}$$

(c) Déduisez-en que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_1 = 1$.

$$\lambda\varphi + \mu\alpha = 1$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\lambda\varphi - \lambda\alpha = 0$$

Comme de plus $\alpha = 1 - \varphi$:

$$\begin{aligned} \lambda\varphi - \lambda(1-\varphi) &= 1 \\ \lambda(2\varphi - 1) &= 1 \\ \lambda\left(2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) &= 1 \\ \lambda\sqrt{5} &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.}$$

Dorénavant on pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On pourra aussi l'écrire

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

(d) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n

$$F_n = v_n.$$

En procédant à une récurrence double immédiate.

IV Étude asymptotique de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

et que $-1 < \alpha < 0$.

8. Étudiez la convergence de (F_n).
Vous pourrez utiliser le résultat de la question 5.(a)

Puisque $-1 < \alpha < 1$:

$$\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $\varphi > 1$:

$$\varphi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Finalement

$$\boxed{F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

V Somme des termes de la suite de Fibonacci.

9. Dans cette question on souhaite calculer la somme S_n des termes de la suite de Fibonacci jusqu'au rang n :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i.$$

(a) Écrivez $\sum_{i=0}^{5} F_i$ avec le symbole d'addition usuel $+$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{5} F_i = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5.}$$

(b) Calculez S_0, S_1, S_2.

*

$$\begin{aligned} S_0 &= F_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} S_1 &= F_0 + F_1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + F_2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(c) En utilisant l'expression de F_n trouvée à la question précédente (c'est-à-dire v_n), montrez que, pour tout entier naturel n

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \varphi^i\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right).$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n\right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n\right] - \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^i\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi^i\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha^n\right) \end{aligned}$$

(d) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} - \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right].$$

On reconnaît la somme des termes de deux suites géométriques :

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi^i = \frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} \text{ et } \sum_{i=0}^{n}\alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Annexe : fiche d'identité de la fonction inverse.

Expression algébrique :

$$f : \begin{cases} ..... & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ..... \end{cases}$$

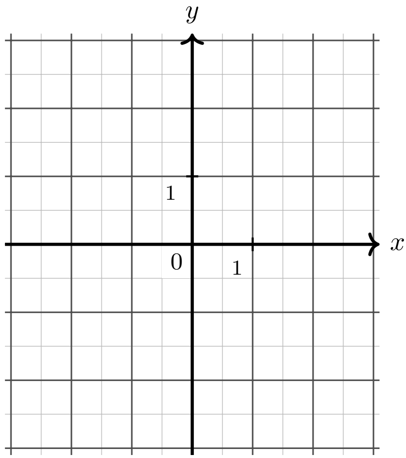
La fonction inverse est dérivable sur ..... et pour tout x pris dans cet ensemble

$$f'(x) = ...$$

Complétez le tableau de valeurs suivant (avec des écritures décimales pas fractionnaires).

x	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2
$f(x)$						

Complétez le graphique suivant en plaçant les points de coordonnées $(x,f(x))$ obtenues dans le tableau de valeurs.



Puis tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction inverse.

Tableau de variation :

x	
f	

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-$	||	$+$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée

.....

Parité : la fonction inverse est

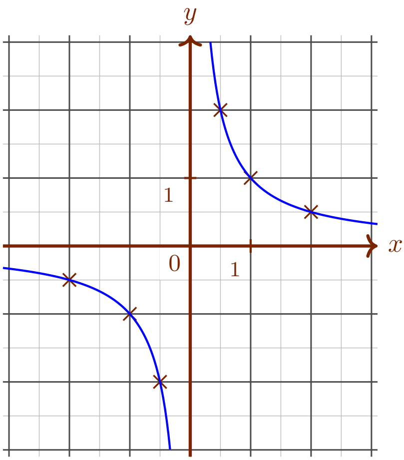
.....

Expression algébrique : $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$	La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x pris dans cet ensemble $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Complétez le tableau de valeurs suivant (avec des écritures décimales pas fractionnaires).

x	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	-2	2	1	$0{,}5$

Complétez le graphique suivant en plaçant les points de coordonnées $(x,f(x))$ obtenus dans le tableau de valeurs.



Puis tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction inverse.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	‖	$-$
f	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-$	‖	$+$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une hyperbole.

Parité : la fonction inverse est impaire.