Devoir maison pour le 2022/09/27.

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudiez le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déduisez des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
4. (a) Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Retrouvez ce résultat en passant à la limite dans la formule de récurrence.

Exercice 2. ⚽

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2.$$

   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).
   (c) Conjecturez son comportement.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$

3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$f(x) - 8 = -0{,}05(x-20)(x-8).$$

   (b) Démontrez que pour tout entier naturel n :

$$8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n).$$

   (c) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n :

$$8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n.$$

   (d) Concluez.