Devoir maison pour le 2022/09/27.

Correction de l'exercice 0

1. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Initialisation.
   Nous voulons vérifier que $\mathscr{P}(1)$ est vraie, autrement dit que $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$. Or $u_1 = 1$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
   Ainsi : $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   * Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et uniquement $\mathscr{P}(n)$, pas $\mathscr{P}(n+1)$ ni $\mathscr{P}(n-1)$.
   Démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit il faut établir que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   D'après l'hypothèse de récurrence :
   $$1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$
   Or $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ est une fonction affine strictement croissante puisque son coefficient directeur est strictement positif, donc :
   $$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2).$$
   Autrement dit :
   $$\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
   Comme de plus $1 \leqslant \frac{3}{2}$ on a bien :
   $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$
   $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   * Conclusion.
   Nous avons démontré par récurrence que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2.}$$

2. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Nous allons démontrer que $\forall n \in \ltimes^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Par définition de la suite :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$
   Donc :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n.$$

i.e.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1. \quad (1)$$

4°

D'après la question précédente, $u_n \leqslant 2$ et donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\times u_n &\geqslant -\frac{1}{2}\times 2 \text{ car } -\frac{1}{2} < 0 \\ -\frac{1}{2}u_n &\geqslant -1 \\ 1 - \frac{1}{2}u_n &\geqslant 1 - 1 \\ -\frac{1}{2}u_n + 1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc par transitivité avec (1) :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

Nous avons démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Autrement dit :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

Avec une démonstration par récurrence nous aurions pu établir un meilleur résultat : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

4. (a) Démontrons par récurrence que $\mathscr{R}(n)$: « $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   * Initialisation.
     Nous voulons vérifier que $\mathscr{R}(1)$ est vraie, autrement dit que $u_1 = -\frac{1}{2^{1-1}} + 2$.
     Il s'agit de vérifier une égalité : on calcul séparément chaque membre.
     D'une part $u_1 = 1$, d'après l'énoncé, et d'autre part, $-\frac{1}{2^{1-1}} + 2 = 1$ donc $\mathscr{R}(1)$ est vraie.
   * Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     Supposons que $\mathscr{R}(n)$ est vraie. Notre hypothèse de récurrence est donc : $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$.
     Démontrons que $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie. Nous devons donc établir que $u_{n+1} = -\frac{1}{2^n} + 2$.

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1. \quad (2)$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2$ donc, en substituant dans (2) :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right) + 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\times 2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2\times 2^{n-1}} + 2 \\ &= -\frac{1}{2^n} + 2 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

* Conclusion.

  Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2.}$$

(b) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$ $\in]-1;1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Finalement, en utilisant l'expression explicite de (u_n) trouvée à la question précédente :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.}$$

5. Notons ℓ la limite de (u_n).

   En passant à la limite dans la formule de récurrence définissant (u_n) on obtient :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1.$$

Cette équation, du premier degré, équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \ell-\frac{1}{2}\ell &= \frac{1}{2}\ell + 1-\frac{1}{2}\ell \\ \frac{1}{2}\ell &= 1 \\ 2\times\frac{1}{2}\ell &= 2\times 1 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 2.}$$

Correction de l'exercice 0

1. (a) Étudions les variations de f.

   * Identification de la fonction de référence ou de la formule pour pouvoir dérivé.

     f est une fonction polynomiale.
   * Domaine de dérivabilité.

     f est donc dérivable sur $[0;8]$.
   * Calcul de la dérivée.

     Soit $x \in [0;8]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1{,}4 - 2 \times 0{,}05x \\ &= -0{,}1x + 1{,}4 \end{aligned}$$

   * Étude du signe de la dérivée : identification dune fonction de référence, d'une fonction affine, d'une fonction polynomiale de degré deux, d'un produit, d'un quotient, factorisation, ...

     f' est une fonction affine avec $a = -0{,}1$ et $b = 1{,}4$.

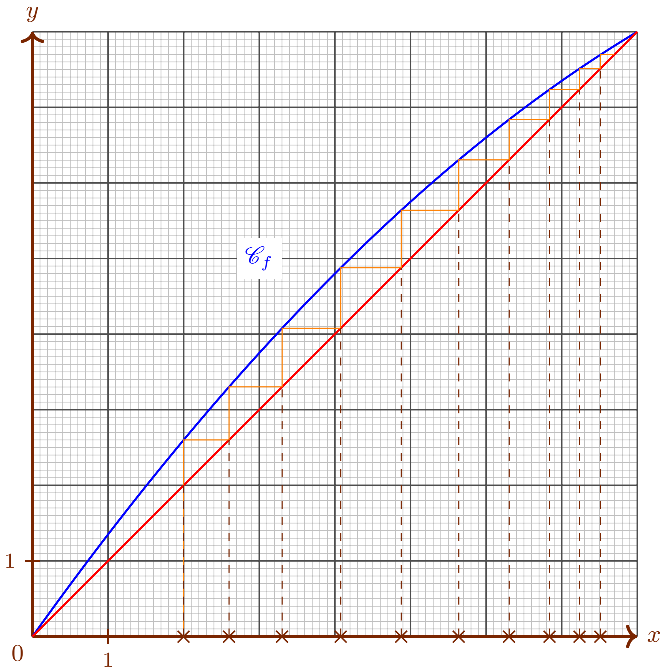
     Donc f' s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{1{,}4}{-0{,}1} = 14$ et f' est strictement décroissante puisque $a < 0$.

     Donc :

   Conclusion sous forme d'un tableau de variation incluant le signe de la fonction dérivée (bien qu'en l'espèce une phrase en français conviendrait tant le cas est simple).

x	0	8
f'	$+$	
f	0 $\nearrow$	8

   (b)



(c) D'après le graphique ci-dessus

$(v_n)_{n\geqslant 0}$ semble converger vers 8.

2. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation.
Nous voulons vérifier que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, autrement dit que $2 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 8$. Or $v_0 = 2$ et $v_1 = f(v_0) = f(2) = 1{,}4 \times 2 - 0{,}05 \times 2^2 = 2{,}6$ donc $2 \leqslant v_0 \leqslant 2{,}6 \leqslant 8$.
Ainsi : $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit il faut établir que $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 8$.
D'après l'hypothèse de récurrence :
$$2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8.$$
Or f est strictement croissante sur $[0; 8]$, d'après les questions précédentes donc :
$$f(2) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1} \leqslant f(8).$$

Autrement dit :

$$2{,}6 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 8.$$

Comme de plus $2 \leqslant 2{,}6$ on a bien :

$$\leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 8.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

* Conclusion.
  Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant v_n \leqslant 8.}$$

3. D'après la question précédente, (v_n) est à la fois croissante et majorée donc

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

4. (a) Il s'agit de démontrer une égalité : nous allons partir d'un membre pour arriver à l'autre.

   Démontrons que $-0{,}05(x-20)(x-8) = f(x) - 8$.

$$\begin{aligned}
-0{,}05(x-20)(x-8) &= -0{,}05(x\times x + x\times(-8) + (-20)\times x + (-20)\times 8)\\
&= -0{,}05(x^2 - 8x - 20x + 160)\\
&= -0{,}05(x^2 - 28x + 160)\\
&= -0{,}05\times x^2 - 0{,}05\times(-28)x - 0{,}05\times 160\\
&= -0{,}05x^2 + 1{,}4x - 8\\
&= f(x) - 8
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{-0{,}05(x-20)(x-8) = f(x) - 8.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la question précédente

$$8 - f(v_n) = -0{,}05(v_n - 20)(8 - v_n).$$

   Or, d'après les questions précédentes on a successivement :

$$\begin{aligned} 2 &\leqslant v_n \\ 2-20 &\leqslant v_n - 20 \\ -0{,}05 \times (-18) &\geqslant -0{,}05(v_n - 20) \\ 0{,}9 &\geqslant -0{,}05(v_n - 20) \end{aligned}$$

donc

$$8 - f(v_n) \leqslant 0{,}9(8 - v_n).$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 8 - f(v_n) \leqslant 0{,}9(8 - v_n).}$$

(c) Avec le résultat de la question précédente on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n$.

(d) Puisque $-1 < 0{,}9 < 1$,

$$0{,}9^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque $0 \leqslant 8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes

$$8 - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8.}$$