Suite géométrique, intérêts simples et composés.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, donc :
la **variation relative** d'une suite géométrique est constante et l'évolution est dite **exponentielle**.

Si la raison q est supérieure à 1 , la suite géométrique est croissante.
Si la raison q est comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est décroissante.

4. Somme de *n* termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement positive et $q \neq 1$.

On admet la formule : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ ou **premier terme** $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

Dans toute cette partie, les **taux *t*** sont en **écriture décimale**. Ainsi pour un taux de 6 % , on écrit $t = 0{,}06$.

1. Placement à intérêts simples

Mehdi a reçu 10 000 €. Il n'en a l'utilité que dans 7 mois. Son banquier lui propose de placer ce capital C_0 au taux de 0,5 % par mois, sur un compte à terme. En fin de mois, les intérêts s'ajoutent au capital, mais sont toujours calculés sur la **valeur nominale** : les intérêts mensuels sont donc constants. Ils sont versés au moment du retrait.

1. a) Calculer les intérêts mensuels.

b) Calculer le montant de son capital au moment du retrait.

2. Montrer que la suite (C_n) des capitaux mensuels acquis, à la fin du n-ième mois de placement, est **arithmétique**. Exprimer C_n en fonction de n.

À savoir
Le capital placé au moment de la création est nommé **valeur nominale** du placement.

Principe du placement à intérêts simples au taux *t*

Un **capital placé *C*** produit, à la fin de chaque période, des intérêts constants, égaux à $t \times C$.

$\boxed{\text{Capital placé}} + \boxed{\text{Int}} + \boxed{\text{Int}} + \boxed{\text{Int}} + \boxed{\text{Int}}$ ...

Au bout de ***n* périodes**, le capital acquis, ou **valeur future** de ce placement, est $C_n = C + C \times t \times n$.

La **période** de placement peut être l'année, le mois, ou le jour.

2. Placement à intérêts composés

Camille a reçu 7 000 € . Elle n'en a pas l'utilité avant 6 ans. Le banquier lui propose de placer ce capital K_0 sur un compte épargne, au taux annuel de 2,2 % , à intérêts composés. Elle ne fait aucun retrait ni dépôt pendant 6 ans. À la fin de chaque année, les intérêts viennent grossir le capital.

1. a) Calculer le montant des intérêts à la fin de la 1re année et le nouveau capital K_1 .

b) De même pour la 2e année.

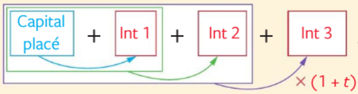
2. a) Montrer que la suite (K_n) des capitaux acquis, après n années, est **géométrique**.

En déduire l'expression de K_n en fonction de n .

b) Calculer le capital acquis à la fin des 6 ans, arrondi à 10^{-2} près.

Principe du placement à intérêts composés au taux t

Pour un placement K , à la fin de chaque période, les intérêts s'ajoutent au capital de la période précédente :
le capital est multiplié par $1 + t$.



Au bout de **n périodes**, le capital acquis, ou **valeur future** de ce placement, est $K_n = K \times (1 + t)^n$.

3. Taux d'intérêts – Taux équivalents

1. Sara prête 1 500 € à son ami Anthony durant 2 ans au taux annuel de 10 %.

Au bout des 2 ans, Sara lui réclame 1 815 € . Anthony n'est pas d'accord et ne veut lui rendre que 1 800 € !
Qui a raison ? Argumenter.

2. Magalie place 5 000 € . Au bout de 4 ans, elle retire 6 000 € , soit 1 000 € d'intérêts acquis.

a) Calculer le coefficient multiplicateur sur 4 ans.
Calculer le coefficient multiplicateur annuel et en déduire le taux annuel moyen d'augmentation, en % arrondi à 3 chiffres après la virgule.

b) Pour évaluer ce taux, Magalie, quant à elle, calcule le quart des intérêts et le divise par le montant de son placement. Faire ce calcul et comparer au taux obtenu en **2.a)** .

3. Sophie place 10 000 € au taux annuel de 6 % , à intérêts composés.
Sophie pense que le taux mensuel est de 0,5 % .
A-t-elle raison ? Argumenter.

Le **taux d'intérêt annuel** d'un placement, d'une capitalisation ou d'un emprunt, est le pourcentage d'évolution à appliquer à cette valeur pour calculer sa valeur future au bout d'un an, intérêts compris.

Le **taux mensuel équivalent** à un **taux annuel** est tel que :

$(1 + t_{mensuel})^{12} = 1 + t_{annuel}$ soit $t_{mensuel} = (1 + t_{annuel})^{\frac{1}{12}} - 1$

Sur tableur, on utilise : (1 + $t_{mensuel}$)^12 = 1 + t_{annuel} soit $t_{mensuel}$ = (1 + t_{annuel})^(1/12) – 1

4. Placement – Capitalisation – Emprunt : valeur actuelle et valeur future

1. a) Plume possède 10 000 € . On lui propose un placement à 3 % annuel. Calculer la valeur future de son placement au bout d'un an.

b) Capucine a ouvert un livret d'épargne.

Elle dépose 564 € sur ce livret et obtient 571,05 € au bout d'un an.

Calculer le taux d'intérêt annuel.

c) Emilio emprunte 6 000 € au taux annuel de 2,3 %. Calculer le montant dû au bout d'un an, s'il n'effectue aucun remboursement.