# Transformations du plan euclidien.

Définition 1

Une *transformation d'un espace affine euclidien* est une bijection entre deux parties de cet ensemble.

## I Réflexions suivant une droite.

## II Symétries centrales.

## III Translations.

## IV Rotations.

### Expression complexe d'une rotation.

Proposition 1

Soient $M$, $M'$ et $A$ deux points du plan d'Argand-Cauchy d'affixes respectives $z$, $z'$ et $a$, $\theta$ un nombre réel.
$M'$ est l'image de $M$ par la rotation $r$ de centre $a$ et d'angle $\theta$ si et seulement si

$$z' = (z-a)\mathrm{e}^{i\theta} + a$$

Démonstration 1

Dépend évidemment de la définition retenue pour la rotation et pour l'instant je ne suis pas fixé.

Remarques.

1. Pour retenir la formule nous pouvons remarquer que $\frac{z'-a}{z-a} = \mathrm{e}^{i\theta}$ qui signifie à la fois que $||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{AM'}||$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \theta \mod 2\pi$, ce qui caractérise bien la rotation.

Exercice 1

Soient $A_1$ et $A_2$ des points d'affixes respectives $a_1$ et $a_2$, et $\theta_1$ et $\theta_2$ deux nombres réels.
Nous noterons $r_1$ (respectivement $r_2$) la rotation de centre $A_1$ (resp. $A_2$) et d'angle $\theta_1$ (resp. $\theta_2$).
Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_2 \circ r_1$.

Correction exercice 1

Soient $M$ et $M'$des points d'affixes respectives $z$ et $z'$.

$$\begin{aligned} M' = r_2 \circ r_1(M) \Leftrightarrow z' &= \left[\Big((z-a_1)\mathrm{e}^{i\theta_1} + a_1\Big) - a_2\right] \mathrm{e}^{i\theta_2} + a_2 \\ \Leftrightarrow z' &= z\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} + a_1\mathrm{e}^{i\theta_2}(1-\mathrm{e}^{i\theta_1}) + a_2(1-\mathrm{e}^{i\theta_2}) \end{aligned}$$

Distinguons les cas.

1. Premier cas : $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \mod 2\pi$.
   Alors
   $$\begin{aligned} M' = r_2 \circ r_1(M) \Leftrightarrow z' &= z + a_1\mathrm{e}^{i\theta_2}(1-\mathrm{e}^{i\theta_1}) + a_2(1-\mathrm{e}^{i\theta_2}) \\ \Leftrightarrow z' - z &= (a_2 - a_1)(1-\mathrm{e}^{i\theta_2}) \end{aligned}$$
   Par conséquent $r_2 \circ r_1$ est la translation de vecteur d'affixe $(a_2 - a_1)(1-\mathrm{e}^{i\theta_2})$.
2. Second cas : $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \mod 2\pi$.

# V Homothéties.

# VI Affinités.

# VII Similitudes.

# VIII Isométrie.

Définition 2

Une *isométrie affine* est une transformation du plan affine euclidien conservant la distance.

# IX Déplacements.

# X Retournements.