# Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, voisinage.

## I Espace topologique et ouverts.

### Définition.

Définition 1

Un *espace topologique* est un couple $(E,\mathscr{O})$ où $E$ est un ensemble de parties de $E$, appelées *les ouverts* vérifiant les propriétés :

(i) $\emptyset \in \mathscr{O}$ et $E \in \mathscr{O}$,

(ii) toute réunion d'ouverts est un ouvert,

(iii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

L'ensemble $\mathscr{O}$ est appelé *une topologie* de $E$.

Remarques.

1. Rappelons que les ensembles d'ensembles sont parfois appelés des classes d'ensembles.
2. Il suffirait de prendre l'intersection de deux ouverts dans la propriété $(iii)$ la généralisation se faisant par récurrence.
3. La propriété $(i)$ est une conséquence des deux suivantes puisque : $\cap_{i\in\emptyset} A_i = E$ et $\cup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$.
4. Les éléments de $\mathscr{O}$ sont appelés les *les ouverts de $E$* ou *les ouverts de $(E,\mathscr{O})$*.
5. Les éléments de $E$ sont appelés les points de l'espace topologique.
6. Il existe d'autres façon de définir une topologie celle-ci est la plus usuelle. Il est également possible de la définir à partir des fermés, des adhérences et des voisinages.
7. Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Ainsi dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle (voir plus loin) les intervalles $\left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont des ouverts mais leur intersection, $\{0\}$ n'est pas un ouvert.

Exemples.

1. $(E,\mathscr{P}(E))$ est un espace topologique. $\mathscr{P}(E)$ est appelée la *topologie discrète* de $E$.
2. $(E,\{\emptyset,E\})$ est un espace topologique. $\{\emptyset,E\}$ est appelée la *topologie grossière*.

# II Fermé.

Définition 2

Soit $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique.

Une partie $F$ de $E$ est appelée un *fermé* si et seulement si $\complement_E F$ est un ouvert de $(E,\mathscr{O})$.

Remarques.

1. Les fermés vérifient donc les propriétés duales de celles des ouverts :
   (i) $\emptyset$ et $E$ sont des fermés,
   (ii) toute intersection de fermés est un fermé,
   (iii) toute réunion finie de fermés est un fermé.
2. Certaines parties peuvent être à la fois des ouverts et des fermés, comme $\emptyset$ et $E$. Dans une topologie discrètes toutes les parties sont à la fois des fermés et des ouverts.

# III Voisinage.

**Généralités.**

Définition 3

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique et $a \in E$.

Nous appellerons *voisinage de $a$* toute partie $V$ de $E$ telle qu'il existe un ouvert $U \in \mathscr{O}$ vérifiant :

$$\{a\} \subset U \subset V.$$

Remarques.

1. L'ensemble des voisinages de $a$ est noté $\mathscr{V}(a)$.
2. Clairement : $E \in \mathscr{V}(a)$.
3. $\forall V \in \mathscr{V}(a)$, $a \in V$.
4. Les voisinages permettent de s'intéresser aux ouverts qui contiennent le point $a$ et en acceptant éventuellement tout sur-ensemble d'un tel ouvert. Cela localise et simplifie la manipulation en comparaison des ouverts.

Exemples.

1. Si $E=\mathbb{R}$, alors $V$ est un voisinage de $a$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a-\alpha;a+\alpha[\subset V$.
2. Dans un espace muni de la topologie discrète $\{a\}$ est un voisinage de $a$.

Proposition 1

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique, $a\in E$.

(i) $\forall V \in \mathscr{V}(a), \forall W \in \mathscr{P}(E),\ (W\supset V \Rightarrow W\in\mathscr{V}(a))$.

(ii) $\forall (V,W) \in \mathscr{V}(a)^2,\ V\cap W \in \mathscr{V}(a)$.

**Caractérisation des ouverts par les voisinages.**

Proposition 2

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique, $A\subset E$.

$A$ est un ouvert si et seulement si $A$ est un voisinage de chacun de ses points.

**Bases de voisinages.**

Définition 4

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique et $a\in E$.

Nous appellerons *base de voisinages de $a$* toute partie $\mathscr{B}\subset\mathscr{V}(a)$ telle que :

$$\forall V\in\mathscr{V}(a),\ \exists B\in\mathscr{B},\ B\subset V.$$

Remarques.

1. Dans un espace topologique quelconque, $\mathscr{V}(a)$ et l'ensemble des voisinages ouverts de $a$ sont des bases de voisinage de $a$.
2. Voyez les bases d'ouverts ci-dessous.

# IV Base d'ouverts.

**Généralités.**

Définition 5

Soit $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique.

Nous appellerons *réseau de $\mathscr{O}$* tout ensemble $\mathscr{R}$ de parties de $E$ tel que tout ouvert $U \in \mathscr{O}$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{R}$.

Remarques.

1. Autrement dit $\mathscr{R}$ est un réseaux si et seulement si :

$$\forall U \in \mathscr{O}, \forall x \in U, \exists R \in \mathscr{R}, \left\{ \begin{array}{l} R \subset U \\ x \in R \end{array} \right. .$$

2. Ainsi un réseau est un ensemble de parties qui permettent d'engendrer par réunion tous les ouverts.

### Définition 6

Soit $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique.

Nous appellerons *base de $\mathscr{O}$* tout réseau de $\mathscr{O}$ formé d'éléments de $\mathscr{O}$ (donc d'ouverts).

Remarques.

1. Autrement dit une base de la topologie est $\mathscr{O}$ est une famille d'ouverts qui engendre par réunion  tout entier.
2. Autrement dit tout ouvert est réunion d'éléments de la base.
3. Lorsque la base a un cardinal dénombrable nous dirons que $(E,\mathscr{O})$ est un espace topologique à base dénombrable.

Exemples.

1. Une base pour la topologie discrète de $E$ est l'ensemble des singletons de $E$.
2. Dans un espace métrique les boules ouvertes constituent une base de la topologie métrique.

### Proposition 3 - Caractérisation des ouverts par la base.

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique, $\mathscr{B}$ une base de $\mathscr{O}$ et $A \subset E$.

$A$ est un ouvert si et seulement si

$$\forall a \in A, \exists O \in \mathscr{B}, \{a\} \subset O \subset A.$$

Remarques.

1. En particulier dans un espace métrique cela deviendra : $A$ est un ouvert si et seulement si pour chaque $a \in A$ il existe une boule ouverte incluse dans $A$ qui contienne $a$ (ou centrée en $a$).

**Caractérisations de la base.**

Proposition 4

Un ensemble $\mathscr{B}$ de parties d'un espace topologique $(E,\mathscr{O})$ est une base de la topologie $\mathscr{O}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions :

(i) $\mathscr{B}$ est un recouvrement de $E$,

(ii) l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ est une union d'éléments de $\mathscr{B}$.

Proposition 5

Un ensemble $\mathscr{B}$ de parties d'un espace topologique $(E,\mathscr{O})$ est une base de la topologie $\mathscr{O}$ si et seulement si pour tout $a \in E$ le sous-ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent $a$ est une base de voisinage de $a$.

**Poids et caractères d'une base d'ouverts.**

# V Intérieur.

Définition 7

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

Nous appellerons *intérieur de $A$* et nous noterons $\mathring{A}$ l'ensemble :

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U.$$

Proposition 6

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ contenant $A$.

## Proposition 7

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x)$.

## Démonstration 1

Soit $x \in E$.

* Supposons $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors il existe un ouvert $U$ de $E$ tel que $U \subset A$ et $x \in A$. Ainsi : $x \in U \subset A$. Donc : $A \in \mathscr{V}(x)$.
* Réciproquement supposons : $A \in \mathscr{V}(x)$. Donc il existe un ouvert $U$ contenant $x$ tel que : $U \subset A$. Par conséquent $x \in \overset{\circ}{A}$.

## Proposition 8

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$A$ est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

## Démonstration 2

## Proposition 9

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A$ et $B$ des parties de $E$.

(i) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(iii) $(A \cap B)^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

(iv) $(A \cup B)^{\circ} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

# VI Adhérence.

Définition 8

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

Nous appellerons *adhérence de $A$* et nous noterons $\overline{A}$ l'ensemble :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

Remarques.

1.

Proposition 10

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

(i) $\overline{A} = \complement_E \overset{\circ}{A}$.

(ii) $\overset{\circ}{A} = \complement_E \overline{A}$.

Remarques.

1. Cette proposition permet de traduire tous les résultats sur l'intérieur par un résultat sur l'adhérence.

Proposition 11

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$.

Démonstration 3

La minimalité découle de la définition par intersection et $\overline{A}$ est un fermé en tant qu'intersection de fermés.

Proposition 12

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathscr{V}(x),\, V \cap A \neq \emptyset)$.

Proposition 13

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$A$ est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition 14

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A$ et $B$ des parties de $E$.

(i) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

## VII Frontière.

Définition 9

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

Nous appellerons *frontière de $A$* et nous noterons $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

Proposition 15

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique,

. $A \subset E$.

$\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé de $E$.

Démonstration 4

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement_E \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$. Donc c'est l'intersection de deux fermés.

# VIII Exemples d'espaces topologiques classiques.

### Sous-espace topologique.

Définition 10

### Topologie de l'ordre.

Définition 11

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $\mathscr{I}$ .

L'ensemble des intervalles ouverts, des demi-droites ouvertes et $E$, forment une base d'une topologie de $E$ appelée la *topologie de l'ordre*.

Démonstration 5

Vérifions que ces ensembles engendrent bien par réunions une topologie de $E$.

Exemples.

1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ peut ainsi être muni d'une topologie qui sera appelée la *topologie usuelle* de $\mathbb{R}$. Remarquons que cette topologie coïncide avec la topologie métrique usuelle de $\mathbb{R}$.

### Espace métrique.

### Espaces vectoriels normés.

### Espaces euclidiens.

### Espaces hermitiens.

### Espaces hilbertiens.

### Espaces de Banach.

### Topologie produit.

# IX Continuité.

### Continuité globale.

Définition 12

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ et $(F,\mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques, $f : (E,\mathscr{O}_1) \to (F,\mathscr{O}_2)$ une application.

Nous dirons que $f$ est *continue* si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $(F,\mathscr{O}_2)$ est un ouvert de $(E,\mathscr{O}_1)$.

Remarques.

1. De façon immédiate et par dualité nous avons la caractérisation : $f$ est continue si et seulement l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

**Continuité locale.**

Définition 13

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ et $(F,\mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques, $f : (E,\mathscr{O}_1) \to (F,\mathscr{O}_2)$ une application, $a \in E$.

Nous dirons que $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathscr{V}(f((a))$ de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $a$.

Remarques.

1. Ainsi $f$ est continue en $a$ si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de $a$.
2. La définition de la continuité locale et de la continuité globale sont bien sûr concordantes comme l'indique la proposition ci-dessous.

Proposition 16

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ et $(F,\mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques, $f : (E,\mathscr{O}_1) \to (F,\mathscr{O}_2)$ une application.

$f$ est continue si et seulement si $f$ est continue en tout point $a$ de $E$.

## X Comparaison de topologies.

Définition 14

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ et $(E,\mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques.

Nous dirons que la topologie $\mathscr{O}_1$ est plus fine que la topologie $\mathscr{O}_2$ si et seulement si $Id_E : (E,\mathscr{O}_1) \to (E,\mathscr{O}_2)$ est continue, et nous noterons $\mathscr{O}_2 \subseteq \mathscr{O}_1$.

Exemples.

1. Cette notion de finesse des topologies permet de munir l'ensemble des topologies de $E$ d'un ordre partiel.
2. La topologie la plus fine sur $E$ est la topologie discrète. La topologie la moins fine est la topologie grossière.
3. Si $E$ est l'ensemble des applications continues sur $[0;1]$, la topologie de la convergence uniforme est plus fine que celle de la convergence simple.
4. Si $f : E \to F$ est continues (pur certaines topologies) elle reste continue si on remplace celle de $F$ par une topologie moins fine (plus grossière) ou si on remplace celle de $E$ par une topologie plus fine.

Proposition 17

L'ensemble des topologies de $E$ forme un treillis complet.

## XI Homéomorphismes.

## XII Applications ouvertes et fermées.