Espaces métriques.

I Distance.

Définition 1

Soit E un ensemble.
Nous appellerons *distance* sur E toute application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *symétrie* : $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$,

(ii) *séparation* : $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(iii) *inégalité triangulaire* : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Remarques.

1. Plutôt que de distance on parle parfois de *métrique*.

Proposition 1

Soient E un ensemble et d une distance sur E.

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ |d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y).$$

Démonstration 1

D'après l'inégalité triangulaire :

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

Donc :

$$d(x,z) - d(y,z) \leqslant d(x,y)$$

D'après la propriété de symétrie :

$$d(x,z) - d(z,y) \leqslant d(x,y) \quad (1)$$

De même nous établirions : $d(z,y) - d(x,z) \leqslant d(x,y) \quad (2)$.
En combinant (1) et (2) nous obtenons bien : $|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$.

II Espace métrique.

Définition 2

Soient E un ensemble et d une distance sur E.

Le couple (E,d) est appelé un *espace métrique*.

Exemples.

1. Soit E un ensemble quelconque. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$ est une distance sur E.
2. Sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $(x,y) \mapsto |x-y|$ est une distance qui est appelée la *distance usuelle*. Lorsqu'on parle de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ comme d'un espace métrique mais sans autre précision, c'est de cette distance qu'il est question.
3. Soit $E = \mathbb{R}^n$ (resp. $E = \mathbb{C}^n$). pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $x = (y_1, \ldots, y_n) \in E$ posons :

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \right)^{1/2},$$

$$d_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

d_1, d_2 et d_∞ sont de distances. d_2 est la distance euclidienne usuelle.
Si $n = 1$ alors $d_1 = d_2 = d_\infty$ est il s'agit de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

III Boules mathématiques.

Définition 3

Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous nommerons *boule ouverte* (resp. *boule fermée*, resp. *sphère*) *de centre a et de rayon r* l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$ (resp. $B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}$, resp. $S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$).

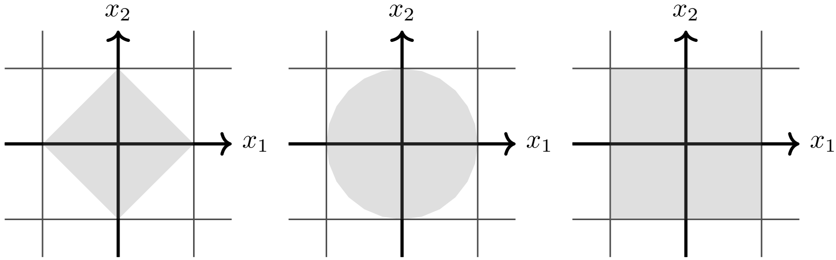
Remarques.

1. Ainsi les boules et sphères ne sont pas de rayon nul.

2. Comme $\{a\} \subset B(a,r) \subset B_f(a,r)$ aucune boule n'est vide. Il n'en n'est pas de même pour les sphères (comme pour une distance sur $\mathbb{Z}^n$).

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}$ les boules ouvertes sont les intervalles bornés non vides ouverts. Dans $\mathbb{R}$ les boules fermées sont les intervalles bornés non réduits à un point fermés.
2. Voici les boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les ditances d_1, d_2 et d_∞.



IV Topologie métrique.

Définition 4

Soit (E,d) un espace métrique.

Nous appellerons *topologie métrique* la topologie canoniquement associée à (E,d) dont une base d'ouverts est formée des boules ouvertes.

Remarques.

1. Un espace topologique est dit *métrisable* lorsqu'il correspond à la topologie canoniquement associée à sa distance.
2. Il n'y a priori pas de raison pour que cette base soit unique. À vérifier.
3. Les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées sont des fermés de la topologie métrique.

Proposition 2

Tout espace métrique est séparé pour la topologie métrique.

Remarques.

1. Il est même normal. À explorer.

V Application continues et espaces métriques.

Applications continues entre espaces métriques.

De façon naturelle nous dirons qu'une application entre espaces métriques est continue si elle l'est pour les topologies induites par les métriques.

Proposition 3

Soient (E,d_1) et (F,d_2) des espaces métriques, $f : (E,d_1) \to (F,d_2)$ une application et $a \in E$.

f est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in E,\ (d_1(x,a) < \eta) \Rightarrow (d_2[(f(x),f(a)] < \varepsilon)\,.$$

Démonstration 2

En utilisant une base de voisinages formée de boules.

Remarques.

1. La proposition reste valable avec des inégalités larges.

Isométries.

Définition 5

Soient (E,d_1) et (F,d_2) des espaces métriques ety $f : (E,d) \to (F,d_2)$ une application.

Nous dirons que f est une *isométrie* si et seulement si

(i) f est une bijection,

(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $d_2[f(x),f(y)] = d_1(x,y)$.

Proposition 4

Toute isométrie est continue.

Théorème 1

Toute isométrie est un homéomorphisme.

Démonstration 3

Découle de la proposition précédente.

VI Espace métrique produit.

VII Comparaison de métriques.

Espaces topologiquement isomorphes (ou espaces homéomorphes).

Définition 6

Deux espaces métriques (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont dits *topologiquement isomorphes* (ou *homéomorphes*) si et seulement s'il existe un homéomorphisme de l'un dans l'autre.

Remarques.

1. Rappelons qu'un homéomorphisme est une application bijective continue dont la réciproque est également continue.
2. Deux métriques d_1 et d_2 sont dites *équivalentes* si les espaces métriques (E,d_1) et (E,d_2) sont homéomorphes.
3. Ainsi deux métriques d_1 et d_2 sur un même ensemble E sont équivalentes si et seulement si l'application identité de (E,d_1) dans (E,d_2) est un homéomorphisme. À démontrer.

Exercice 1

Soient $X = \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x - y|$ et $d_2 = |\arctan x - \arctan y|$ deux métriques définies sur X.
Montrer que d_1 et d_2 sont équivalentes.

Espaces uniformément équivalents.

Définition 7

Deux espaces métriques (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont dits *uniformément équivalents* si et seulement si il existe une bijection de l'un dans l'autre qui soit uniformément continue et dont la réciproque est également uniformément continue.

Remarques.

1. Deux métriques d_1 et d_2 sur un même ensemble E sont équivalentes si et seulement si l'application identité de (E,d_1) dans (E,d_2) est uniformément continue ainsi que son inverse. À démontrer.
2. Si deux métriques sont uniformément équivalentes alors elles sont équivalentes.

   La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de l'exercice ci-dessous.

Exercice 2

Soient $X = [0;1]$, $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2 = |x-y|^{\frac{1}{2}}$ deux métriques définies sur X.
Montrer que d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes.

Espaces Lipschitz-équivalents.

Définition 8

Deux espaces métriques (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont dits *Lipschitz-équivalents* si et seulement si il existe une bijection de l'un dans l'autre qui soit lipschitzienne et dont la réciproque est également lipschitzienne.

Remarques.

1. Deux métriques d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $\forall (x,y) \in X^2$, $ad_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant bd_1(x,y)$.
2. Si deux métriques sont Lipschitz-équivalentes alors elles sont uniformément équivalentes.
   La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de l'exercice ci-dessous.

Exercice 3

Soient $X = \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2 = |x-y| + |\arctan x - \arctan y$ deux métriques définies sur X.
Montrer que d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes (on établira que $d_1 \leqslant d_2 \leqslant 2d_1$.).

Exercice 4

Si d_1 et d_2 sont les distances canoniquement associées aux normes N_1 et N_2 d'un espace vectoriel E, alors les d_1 et d_2 sont équivalentes, uniformément équivalentes et Lipschitz-équivalentes.

Espaces métriques semblables.

Espaces métriques similaires.

VIII Distance entre ensembles.

Généralités.

Définition 9

Soit (E,d) un espace métrique.

Si A_1 et A_2 sont des parties non vides de E, la *distance* de A_1 à A_2 est le réel (positif)

$$d(A_1,A_2) = \inf \{d(x,y) \mid (x,y) \in A_1 \times A_2\}.$$

Remarques.

1. Les parties doivent être non vides afin que la borne inférieure ait un sens.
2. La borne inférieur existe bien puisque l'ensemble considéré est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

Distance d'un point à un ensemble.

Définition 10

Soient (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $x \in E$.

Nous appellerons *distance de x à A* le nombre réel (positif)

$$d(x,A) = \inf \{d(x,y) \mid y \in A\}.$$

Remarques.

1. Là encore A est non vide pour que la borne inférieure existe bien. Cette borne existe puisque que l'ensemble considéré est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}$, $d(a,\mathbb{Q}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 5

Soient (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $x \in E$.

$d(x,A)$ est le rayon de la plus grande boule ouverte de centre x qui ne rencontre pas A.

Proposition 6

Soient (E,d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $x \in E$.

$d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Démonstration 4

Démontrons l'équivalence par double implication.

* Supposons $x \in \overline{A}$ et démontrons que $d(x,A) = 0$.

Remarques.

1. Si A est fermé alors : $d(x,A) = 0 \Rightarrow x \in A$.
2. En général $d(x,A)$ ne permet pas d'affirmer que $x \in A$. Par exemple dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $d\left(0,]0;1]\right) = 0$ et pourtant $0 \notin]0;1]$. Dans le même espace la distance entre un irrationnel est $\mathbb{Q}$ est nulle.

IX Diamètre d'un ensemble, partie bornée.

Diamètre d'un ensemble.

Définition 11

Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E.

Nous appellerons *diamètre de A*, et nous noterons $\delta(A)$, l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

Partie bornées.

Définition 12

Une partie A d'un espace métrique est dite *bornée* si et seulement si elle est vide ou si $\delta(A) < +\infty$.

Proposition 7

Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.

A est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.

Démonstration 5

X Espace métrique et compacité.

Compacts et parties bornées.

Proposition 8

Un espace métrique compact est borné. Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.

Démonstration 6

Il suffit d'utiliser un recouvrement par des boules ouvertes.

Caractérisation séquentielle des compacts dans un espace métrique.

Théorème 2

Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet une valeur d'adhérence.

Remarques.

1. Autrement dit : de toute suite on peut extraire une sous-suite convergentes.

Compacité et complétude dans un espace métrique.

Théorème 3

Tout espace métrique compact est complet.

Remarques.

1. Ce résultat est surprenant puisque la complétude dépend de la distance considérée tandis que la compacité reste valable par changement de distance topologiquement équivalentes.

Théorème de Heine.

Théorème 4

Tout application continue f d'un espace métrique compact (E,d_1) dans un espace métrique (F,d_2) est uniformément continue.

XI Espace métrique précompact.

XII Espace métrique propre.

Définition 13

Un espace métrique est dit *propre* si toutes ses boules fermées sont compactes.