# Espaces séparés.

## I Espace séparé (ou espace de Hausdorff).

### Généralités.

Définition 1

Soit $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique.

Nous dirons que $(E,\mathscr{O})$ est un *espace topologique séparé (ou un espace de Hausdorff)* si et seulement si pour deux éléments distincts de $E$ il existe toujours deux voisinages disjoints.

Remarques.

1. Nous dirons parfois que la topologie est séparée.

Exemples.

1. Tout ensemble muni de la topologie discrète est séparé puisque les singletons sont des voisinages des points de $E$.
2. Tout espace métrique est séparé (en raisonnant avec la base d'ouverts que forment les boules ouvertes pour la topologie métrique).
3. Un ensemble contenant plus de deux éléments et muni de la topologie grossière n'est pas séparé.

Exercice 1

Démontrez que dans un espace séparé tout singleton est un fermé.

### Limite de suite.

Proposition 1

Dans un espace séparé une suite convergente admet une unique limite.

### Espaces séparés et comparaison de topologies.

Proposition 2

Une topologie plus fine qu'une topologie séparée est encore séparée.

#### Séparation et sous-espaces topologiques.

Proposition 3

Tout sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est encore séparé.

#### Séparation et produit d'espaces topologiques.

Proposition 4

Un produit d'espaces topologiques non vides est séparé si et seulement si chacun d'eux l'est.

Proposition 5

$(E,\mathscr{O})$ est séparé si et seulement si dans l'espace produit $E \times E$ la diagonale $\left\{(x,x) \mid (x,x) \in X^2\right\}$ est un fermé.

#### Espace localement séparé.

Définition 2

Un espace topologique $(E,\mathscr{O})$ est dit *localement séparé* si tout point de $E$ admet un voisinage séparé.

#### Exercices.

Exercice 2

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ et $(F,\mathscr{O}_2)$ des espaces topologiques, $f,g : E \to F$ des applications, $D$ une partie de $E$ dense dans $E$.

Montrer que si $f$ et $g$ sont continues et coïncident sur $D$ et que $(F\mathscr{O}_2)$ est un espace séparé alors $f = g$.

## II Axiomes de séparation.