Compacité.

I Généralités.

Espace topologique compact.

Définition 1

Un espace topologique séparé $(E,\mathscr{O})$ est dit *compact* si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

Remarques.

1. La condition de séparation est indispensable même si elle n'est pas présente chez tous les auteurs. Rappelons que séparé signifie que deux quelconques éléments distincts de l'espace admettent toujours des voisinages disjoints.
2. La propriété définissant la compacité est appelée *propriété de Borel-Lebesgue*.
3. En considérant les complémentaires nous obtenons la caractérisation : E est compact si et seulement si toute famille de fermés d'intersection vide contient une famille finie d'intersection vide.

Exemples.

1. Tout ensemble muni de la topologie grossière est évidemment compact.
2.

Sous-espace compact.

Définition 2

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique séparé, K une partie de E.

Nous dirons que *la partie K est compacte* si seulement si elle est compacte pour la topologie induite.

Remarques.

1. La compacité est une propriété intrinsèque à K.

Proposition 1

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique séparé et A une partie de E.

A est compacte si et seulement si de tout recouvrement fini de A par des ouverts il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

Remarques.

1. Nous avons la caractérisation duale avec les fermés.

Compacité et topologie.

Proposition 2

Une partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.

Démonstration 1

Soit K un compact d'un espace topologique séparé $(E,\mathscr{O})$.

Démontrons que K^c est un ouvert.

Pour cela nous allons établir que K^c est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $x \in K^c$.
Puisque E est séparé, pour chaque $a \in K$ il existe des voisinages ouverts disjoints U_a et V_a respectivement de a et x.
$\cup_{a\in K} U_a$ est un recouvrement de K par des ouverts, et puisque K est compact il existe un sous recouvrement fini $\cup_{i=1}^n U_{a_i}$ de K.

$\cap_{i=1}^n V_{a_i}$ est un voisinage ouvert de x.
$(\cap_{i=1}^n V_{a_i}) \cap (\cup_{i=1}^n U_{a_i}) = \emptyset$ et $K \subset \cup_{i=1}^n U_{a_i}$ donc $\cap_{i=1}^n V_{a_i} \subset K^c$.
Par conséquent K^c est un voisinage de x.
Nous avons établi que K^c est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert, et par conséquent

K est un fermé.

Proposition 3 - caractérisation des parties compactes fermées

Une partie fermée d'un compact est compacte.

Démonstration 2

Soient $(E,\mathscr{O})$ un espace compact et K une partie fermée de E.

Démontrons que K est un compact.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts.
Alors, K étant fermé, $K^c \cup (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E par des ouverts. E étant compact il existe donc un sous-recouvrement fini de E qui est aussi un sous-recouvrement fini de K par des ouverts pour la topologie induite sur K.

Remarques.

1. Ainsi d'après les deux propositions précédentes : dans un espace compact les parties fermées et compactes coïncident.

II Continuité et compacité.

Théorème 1

Soient $(E,\mathscr{O}_1)$ un espace topologique compact, $(F,\mathscr{O}_2)$ un espace topologique séparé et f une application continue de E dans F.

Alors $f(E)$ est une partie compacte de F.

Démonstration 3

Puisque nous savons par hypothèse que F est séparé, pur démontrer que E est une partie compacte de F il suffit de démontrer la propriété de Borel-Lebesgue.
Soit donc $\cup_{i\in I} U_i \subset f(E)$ un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts de F.

Démontrons qu'il existe un sous-recouvrement fini de $f(E)$.

Puisque f est continue les $f^{-1}(U_i)$ sont des ouverts de E.
De plus
$$E \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(U_i\right).$$
Ainsi $E \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ est un recouvrement de E par des ouverts.
Puisque E est un compact il est donc possible d'en extraire un sous-recouvrement fini :

$$\begin{aligned} E &\subset \cup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \\ f(E) &\subset f\left(\cup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)\right) \\ &\subset \cup_{i=1}^{n} f\circ f^{-1}(U_i) \end{aligned}$$

Or $f\circ f^{-1}(U_i) \subset U_i$ donc

$$f(E) \subset \cup_{i=1}^{n} U_i$$

Nous avons bien trouvé un sous-recouvrement fini par conséquent $f(E)$ est un compact de F.

Remarques.

1. Ainsi : l'image continue d'un compact par une application à valeurs dans un espace séparé est un compact.

Corollaire 1

Soient E et F des espaces topologiques, F étant séparé.

Si f est une application continue de E dans F, l'image par f de toute partie compacte de E est une partie compacte de F.

Corollaire 2

Une fonction numérique (donc à valeurs dans $\mathbb{R}$) continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes.

Remarques.

1. Ce corollaire nécessite le théorème de Borel-Lebesgue.

III Compacité dans un espace métrique.

IV Théorème de Bolzano-Weiertrass.

V Théorème de Borel-Lebesgue (ou de Heine-Borel).

Théorème 2

Une partie de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa topologie induite par n'importe laquelle de ses normes) est compacte si et seulement si c'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$.

VI Théorème des bornes (ou de Weierstrass).

http://www.les-mathematiques.net/a/m/c/node6.html

VII Théorème de Heine.

Une application continue sur un compact d'un espace métrique est uniformément continue.

VIII Espace précompact.

IX Parties relativement compactes.

Définition 3

Soient :

. $(E,\mathscr{O})$ un espace topologique séparé,

. X une partie de E.

Une partie X de E est dite relativement compacte si et seulement si elle est contenue dans une partie compacte de E.

Remarques.

1. Le théorème d'Ascoli permet de vérifier qu'une partie de l'ensemble des fonctions continues sur un compact et à valeur dans un espace métrique est relativement compact.

Proposition 4 - caractérisation des parties relativement compactes

Une partie d'un espace topologique séparé est relativement compacte si et seulement si son adhérence est compacte.

Proposition 5

Dans un espace métrique (E,d) une partie X est relativement compacte si et seulement toute suite d'éléments de X admet une sous-suite qui converge dans X.

Proposition 6

Une partie d'un espace métrique complet est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.

Proposition 7

En particulier dans $\mathbb{R}^n$, les parties relativement compactes sont les parties bornées.