Domaine d'utilisation des graphes : polyèdre, treillis, groupes.

Graphe non orienté.

$\mathscr{P}_i(E)$ désignera l'ensemble des parties de E ayant $i \in \ltimes$ éléments.

I Définitions.

Définition 1

Soient :
. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,
. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Le couple $G = (V,E)$ est appelé un *graphe (non orienté)*.

Remarques.

1. Les éléments de E, qui sont appelés des *arêtes*, sont soit des singletons, qui sont appelés des *boucles*, soit des paires d'éléments de V, qui sont appelés des *liens*.
2. E est une famille et peut donc contenir plusieurs fois un élément. Autrement dit il peut y avoir plusieurs arêtes reliant deux nœuds.
3. Un graphe non orienté est dit *simple* s'il n'a ni boucle ni arête multiple. Un graphe ayant une ou des boucles ou des arêtes multiples est appelé un *multigraphe*.
4. Un graphe non orienté sans arête multiple représente une relation binaire symétrique.
5. Définition alternative. Soient V et E deux ensembles disjoints, ψ une fonction (appelée *fonction d'incidence*) qui à chaque arête de E associe une paire d'éléments (non nécessairement distincts) de V.
6. Le nombre de sommets du graphe est appelé l'*ordre* du graphe.
7. Le nombre d'arêtes du graphe est appelé la *taille* du graphe.
8. Pour un arc $\{v_1,v_2\}$, v_1 v_2 sont appelés des *extrémités*. Et dans ce cas nous dirons que v_1 et v_2 sont *adjacents*.
9. Le *degré* d'un sommet v d'un graphe G est le nombre, noté $d_G(v)$, d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour deux).
10. Deux arêtes sont dites *parallèles* si elles ont mêmes extrémités.

11. Nous dirons qu'une arête e est *incidente* à un sommet v ou qu'un sommet v est *incident* à une arête e si v est une extrémité de e.
12. L'ensemble des sommets *voisins* de v est l'ensemble des sommets adjacents à v mais distincts de v.

II Taxinomie des graphes.

Des graphes.

Un *graphe complet* est un graphe simple dans lequel deux sommets quelconques sont toujours adjacents.

Un *graphe vide* est un graphe dont l'ensemble des arêtes est vide.

Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition $X \sqcup Y = V$ de V telle que tous les éléments de E, les arêtes donc, aient une extrémité dans X et l'autre dans Y. Nous écrirons alors $G[X,Y]$. Nous dirons que (X,Y) est une *bipartition* de G.

Un graphe est dit *biparti complet* s'il est biparti et que tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y.

Un graphe est appelé une *étoile* s'il est biparti complet $G[X,Y]$ et tel que $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

Nous appellerons *chaîne* un graphe simple dont l'ensemble des sommets peut être ordonné en une liste de sorte que, si ils sont consécutifs dans cette liste, alors deux sommets sont adjacents. Nous appellerons *cycle* pour un graphe ayant au moins trois sommets (ordre $n \geq 3$) une chaîne dont les premiers et derniers sommets de la liste sont aussi adjacents. La *longueur d'une chaîne ou d'un cycle* est sa taille. Un k -cycle comporte dont k-arêtes.

Un graphe $G = (V,E)$ est dit *connexe* si quelque soient les nœuds e et f, il existe une chaîne de e vers f.

Nous dirons qu'un graphe est un p-graphe ($p \in \mathbb{N}$) si quelque soient les sommets v_1 et v_2, le nombre d'arêtes allant de v_1 à v_2 est inférieur à p.

Un graphe est dit *k-régulier* ($k \in \mathbb{N}$) si

$$\forall v \in V,\ d(v) = k$$

Un graphe est dit simplement *régulier* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il soit k-régulier.

Un graphe est dit *fini* si V et E sont tous deux finis. Notre définition est celle d'un graphe fini il est cependant possible de définir des graphes non finis.

Un graphe est dit *nul* si V et E sont vides.

Un graphe est dit *trivial* s'il possède un unique sommet.

III Représentation matricielle.

Matrice d'incidence.

Définition 2

Soient :
. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,
. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Nous appellerons *matrice d'incidence du graphe non-orienté $G = (V,E)$* la matrice $B(G) = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients vérifient :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } v_i \text{ et } e_j \text{ ne sont pas incidents,} \\ 1 \text{ si } v_i \text{ et } e_j \text{ sont incidents,} \\ 2 \text{ si } e_j \text{ est une boucle d'extrémité } v_i. \end{cases}$$

Remarques.

1. La matrice d'incidence est donc une retranscription exacte du graphe lui-même. Ils sont équivalents (il y a sans doute un morphisme sous-jacent.

Matrice d'adjacence.

Définition 3

Soient :
. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,
. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Nous appellerons *matrice d'adjacence du graphe non-orienté $G = (V,E)$* la matrice $A(G) = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient a_{ij} égale
— le nombre d'arêtes d'extrémités v_i et v_j si $i \neq j$,
— le double du nombre de boucles sinon

Remarques.

1. Pour un graphe non-orienté la matrice d'adjacence est symétrique.
2. Si le graphe est simple la matrice d'adjacence ne comporte que des 0 et 1 (elle est booléenne) et sa diagonale ne comporte que des 0.

3. Les matrice s d'adjacences, avec les listes d'adjacences, sont très utilisées en informatique.
4. Les matrices d'adjacences sont également utiles avec les chaîne de Markov (la probabilité limite en est un vecteur propre).

Matrice d'adjacence bipartie.

Définition 4

Soient :
. $(n,p,r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,
. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.
. $X = \{x_1,\ldots,x_r\}$ et $Y = \{y_1,\ldots,y_s\}$ des parties de telles que $V = X \sqcup Y$,

Nous appellerons *matrice d'adjacente bipartie de $G[X,Y]$* la matrice $B(G) = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!]}$ dont le coefficient b_{ij} égale le nombre d'arêtes reliant x_i et y_j.

IV Listes d'adjacences.

V Degré d'un sommet.

Définition 5

Soient :
. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,
. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Le *degré d'un sommet* v du graphe $G = (V,E)$ est le nombre d'arêtes de G incidentes avec v. Il est noté $d_G(v)$.

Remarques.

1. Si G est un graphe simple $d_G(v)$ est le nombre de voisins de v.
2. Si $d_G(v) = 0$ alors le sommet v est dit *isolé*.

3. $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ désignent respectivement les degrés minimum et maximum des sommets du graphe. Nous noterons $d(G)$ le *degré moyen de G* défini par

$$d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Théorème 1

Soient :

. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

. $V = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ un ensemble,

. $E = (u_1,u_2,\dots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Pour le graphe non orienté $G = (V,E)$,

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2p$$

Démonstration 1

Considérons la matrice d'incidence, A_G, du graphe.

Une ligne de A_G correspond à un sommet v_i ($i \in [\![1,n]\!]$) et elle est remplie de 0 ou de 1 suivant que v_j est incident aux arêtes ou pas, donc la somme de tous les coefficients est

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i j = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Une colonne de A_G correspondant à une arête e est emplie de 0 hormis deux coefficients qui valent 1, et comme il y a p colonnes la somme de tous les coefficients est

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_i j = \sum_{j=1}^{p} 2 = 2p$$

Corollaire 1

Soient :

. $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

. $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ un ensemble,

. $E = (u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de $\mathscr{P}_1(V) \cup \mathscr{P}_2(V)$.

Pour le graphe non orienté $G = (V,E)$, le nombre de sommets de degré impaire est paire.

Démonstration 2

De l'égalité du théorème précédent nous déduisons, modulo deux,

$$\sum_{v\in V} d_G(v) \equiv 2p \pmod 2$$

Puis

$$\sum_{v\in V} d_G(v) \equiv 0 \pmod 2$$

$$\sum_{\substack{v\in V\\ d_G(v)\ \text{pair}}} 0 + \sum_{\substack{v\in V\\ d_G(v)\ \text{impair}}} 1 \equiv 0 \pmod 2$$

En notant r le nombre de sommets de degré impair :

$$r \equiv 0 \pmod 2$$