Titre.

I Exercices.

Exercice 1

Démontrez

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}n^n}{n!}$$

Correction exercice 1

Notons $P(n)$ l'égalité proposée.

Démontrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P(n) &\Leftrightarrow \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}n^n}{n!} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} = \frac{n \cdot n^n}{n!} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} = \frac{n^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Ainsi pour démontrer $P(n)$ il faut et il suffit que nous démontrions

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

ce que nous allons maintenant faire.

Partons du membre de gauche pour arriver au membre de droite dans l'égalité.
En enlevant un terme nul de la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)n^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n \cdot n^k - k \cdot n^k}{k!} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!}\right] - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k \cdot n^k}{k!}\right]
\end{aligned}$$

En faisant un changement d'indice, $j = k+1$, dans la première somme et enlevant un terme nul de la seconde

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} &= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{n^j}{(j-1)!}\right] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot n^k}{k!} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{(k-1)!}\right] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot n^k}{k!} \\
&= \frac{n^n}{(n-1)!} + \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^k}{(k-1)!}\right] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot n^k}{k!} \\
&= \frac{n^n}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^k}{(k-1)!} - \frac{k \cdot n^k}{k!} \\
&= \frac{n^n}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1} n^k \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{k!}\right) \\
&= \frac{n^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!} = \frac{n^n}{(n-1)!}.}$$