Variables aléatoires finies.

Dans cette leçon nous considérons Ω un univers fini.

I Variable aléatoire réelle finie.

Définition.

Définition 1

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Nous appellerons *variable aléatoire réelle sur Ω à valeurs réelles* toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A)$ sera noté $\{X \in A\}$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$ nous écrirons
   — $\{X = x\}$ plutôt que $X^{-1}(\{x\})$,
   — $\{X \leq x\}$ plutôt que $X^{-1}(]-\infty; x])$.
   Il s'agit de notations usuelles pour des événements que nous retrouverons souvent.
2. Les événements $\{X = x\}$, lorsque x décrit $\mathbb{R}$ forment un système complet d'événements de Ω appelé *le système complet d'événements associé à X*. Autrement dit $\{X = x\}_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Cela découle d'un résultat général sur les applications : si $f : E \to F$, alors $E = \sqcup_{y\in F} f^{-1}(y)$.
3.

Exemples.

1. Gain dans un jeu de hasard.
2. Transformer un pile ou face en une épreuve de Bernoulli dont les issues sont 0 et 1.
3. La durée de vie d'une vie n'est pas une situation de variable aléatoire finie puisque la durée de vie peut, théoriquement être infinie.

Lois.

Proposition 1 - Loi d'une variable aléatoire

Soient

. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array} \right.$ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ appelée *loi de X*.

Remarques.

1. Nous appellerons *loi conditionnelle de X sachant A* l'application $x \mapsto \mathbb{P}_A(X = x) = \mathbb{P}_X(x|A)$ de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2 - Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soient

. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. X une variable aléatoire sur Ω,

. $f : X(\omega) \to \mathbb{R}$ une application.

La variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ sera notée $f(X)$.

Pour tout $y \in f\left(X(\Omega)\right)$,

$$\mathbb{P}\left(f(X) = y\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(y)=x}} \mathbb{P}(X = x)$$

Formule des probabilités totales.

II Espérance d'une variable aléatoire réelle finie.

Généralités.

Définition 2

Soient

. $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Nous appellerons *espérance de X* le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X = x)x$$

Remarques.

1. Ce qui s'écrit encore
$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}_X(x)x$$

2. L'espérance peut tout aussi bien être définie par
$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

3. Nous dirons que *X est centrée* si $E(X) = 0$.

Exemples.

1. Espérance d'une variable constante.

Proposition 3 - Propriété de l'espérance

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ des variables aléatoires.

(i) Linéarité :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y)$$

(ii) Positivité :

$$X\geq 0\Rightarrow E(X)\geq 0$$

(iii) Croissance :

$$X\leq Y\Rightarrow E(X)\leq E(Y)$$

(iv) Inégalité triangulaire :

$$|E(X)|\leq E(|X|)$$

(v) $\mathbb{E}(X)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)$.

Remarques.

1. De la linéarité de l'espérance nous déduisons que $\mathbb{E}\left[X-\mathbb{E}(X)\right]=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)\right]=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0$. Autrement dit $X-\mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.
2. La dernière propriété garantie dans le cas d'une variable aléatoire infinie que si celle-ci admet un moment d'ordre deux alors elle en admet un d'ordre un. (En lien avec Cauchy-Schwarz).

Formule de transfert.

Théorème 1 - Formule de transfert

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire,
. $f:X(\Omega)\to\mathbb{R}$ une fonction.

L'espérance de $f(X)$ est

$$E\left(f(X)\right)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)f(x)$$

III Variance.

Définition 3

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Nous appellerons *variance de X* le nombre réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

Proposition 4 - Propriété de la variance

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires.

(i)
$$\mathbb{V}(X) \geqslant 0.$$

(ii)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2 \mathbb{V}(X).$$

Moments d'une variable aléatoire.

Définition 4

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Pour tout entier naturel k, $\mathbb{E}(X^k)$ est appelé le *moment centré d'ordre k de X*.
Le réel $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^k\right]$ est appelé le *moment d'ordre k centré de X*.

Remarques.

1. Le moment centré est le moment de la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ qui est donc centré sur l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

2. Dans le cas d'une variable aléatoire infinie la question de l'existence des moments ne va pas de soit puisque l'espérance s'apparente à une série dont la convergence n'est pas assurée.
3. Un théorème important permet d'établir que l'ensemble des moments d'une variable aléatoire caractérise complètement sa loi.

IV Variables aléatoires indépendantes.

Paire de variables aléatoires indépendantes.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

V Exemples classiques de variables aléatoires finies.

Loi uniforme.

Définition 5

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Nous dirons que X suit une *loi uniforme* sur $[\![1,n]\!]$, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Remarques.

1. Il s'agit d'une expérience pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité. Nous parlerons parfois d'équiprobabilité.

Exemples.

1. Exemple type : choix d'un entier au hasard entre 1 et n.

Proposition 5

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, alors

$$\mathbb{E}(X)=\frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X)=\frac{n^2-1}{12}.$$

Processus de Bernoulli : loi de Bernoulli.

Définition 6

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Nous dirons que X suit une *loi de Bernoulli de paramètre* p, et nous noterons $X \hookrightarrow b(p)$ si et seulement si

$$\mathbb{P}(X=1)=p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0)=1-p.$$

Remarques.

1. $\{X=1\}$ est appelé le *succès* et $\{X=0\}$ l'*échec*
2. Il s'agit de l'expérience aléatoire la plus simple possible : avec moins d'issues nous passerions dans le domaine déterministe.

Exemples.

1. Exemple type : X indique le succès (1) ou l'échec (0) lors d'une expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de succès est p.

Proposition 6

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Si $X \hookrightarrow b(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X)=p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X)=p(1-p).$$

Processus de Bernoulli : loi binomiale.

Définition 7

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Nous dirons que X suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarques.

1.

Exemples.

1. Exemple type : X compte le nombre de succès lors d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Proposition 7

Soient
. $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,
. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Processus de Bernoulli : loi hypergéométrique.

VI Exercices.

Exercice 1

Une loterie se déroule une fois par semaine. Chaque semaine, sur 100 billets, k sont gagnants.

On suppose $k \leqslant 90$.

Chaque billet coûte 1 euro. On dispose de 10 euros.

Deux stratégies sont possibles :

- on achète 10 billets en une seule fois.
- on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour obtenir au moins 1 billet gagnant ?