Probabilité sur un ensemble fini.

I Introduction et vocabulaire.

Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience (au sens des sciences expérimentales) dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues).

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* et est noté Ω. Tout ensemble fini peut-être vu comme un *univers*. Il n'y a donc pas de définition générale (axiomatique) de l'univers dans le cas fini.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue*.

Les probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

Événements.

Un événement est un sous-ensemble de *l'univers*. Ainsi (pour un univers fini) l'ensemble de tous les événements est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Intuitivement un événement est un regroupement d'issues qui le plus souvent auront une propriété commune.

Certains événements sont distingués. Les singletons de Ω sont appelés les *événements élémentaires* de Ω. Ω est appelé *l'événement certain*. $\emptyset$ est appelé *l'événement impossible*.

Si A et B sont des événements alors $A \cup B$ est l'événement « A ou B » et $A \cap B$ est l'événement « A et B ». Deux événements A et B sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints *i.e.* si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 1

Un *système complet d'événements* est un ensemble d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'événement certain.

Remarques.

1. Un système complet d'événements de Ω ressemble à ce qui avec le langage ensembliste est appelé une partition de Ω avec cette différence que la partition ne contient pas d'événement vide.

2. Dans le cas fini il s'agit donc d'une famille $\{A_1,\dots,A_p\}$ d'événements tels que :
$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{p} A_i$$
3. Le vocabulaire sur les événements donné dans cet partie s'applique encore dans le cas d'univers non finis.

Exemples.

1. Pour un lancer de dé à six faces, les événements pair et impair constituent un système complet d'événements.
2. $\{A,\overline{A}\}$ et $\{A\cap B,\overline{A}\cap B,A\cap\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B}\}$ sont des systèmes complets d'événements.
3. Si $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ alors $\{\{\omega_1\},\dots,\{\omega_n\}\}$ est système complet d'événements.

Loi de probabilité.

Définition 2

Une *probabilité sur un univers fini* est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ telle que

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $A\cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. (*additivité*)

Le triplet $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ est appelé un *un espace probabilisé*.

Remarques

1. L'additivité s'interprète : si A et B sont des événements incompatibles alors : $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
2. Puisque les événements A et B sont incompatibles nous aurions pu écrire $\mathbb{P}(A\sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. Dans le cas d'un univers fini il est toujours possible de considérer que la tribu associée à l'espace probabilisable est la tribu discrète $\mathscr{P}(E)$.

Définition 3

Soit Ω un ensemble fini.
L'application $\mathbb{P} : A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$ est une probabilité sur Ω appelée la *probabilité uniforme*.

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition et elle découle des propriétés de la fonction cardinal.
2. On parle aussi d'*équiprobabilité*, chaque issue ayant la même probabilité.

Exercice 1

On tire simultanément au hasard trois boules d'une urne qui contient 4 boules rouges, 5 blanches et 7 jaunes.

Déterminez la probabilité d'obtenir :

1. Un tirage monocolore.
2. Un tirage tricolore.
3. Un tirage bicolore.

Propriétés des probabilités.

Proposition 1 - Propriétés des probabilités.

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A, B, $A_1,\dots,A_n$ des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ quelque soit$n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Ensemble vide. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Complémentaire. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iii) Différence. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) Croissance. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(v) Réunion. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vi) Sous-additivité.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

(vii) Réunion disjointe (deux à deux).

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

(viii) Formule du crible.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

Démonstration 1

Les démonstrations de ces propriétés font appel à des propriétés des ensembles et des propriétés sur les opérations d'ensembles qui ne seront pas revues ici.

(i) D'après l'axiome (a_2) de la définition d'une probabilité, puisque $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset).$$

Or $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, donc :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset).$$

Et enfin $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Nous remarquons que $\overline{A} \sqcup A = \Omega$.
$\overline{A} \cap A = \emptyset$ donc, d'après l'axiome (a_2),

$$\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega)$$

D'après l'axiome (a_1) : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
D'où

$$\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = 1$$

(iii) Nous remarquons : $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$.

(iv) Nous remarquons : $B = A \sqcup (B \setminus A)$.

(v) Nous remarquons : $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

(vi) D'après le précédent $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Puis par récurrence nous généralisons.

(vii) Découle de l'additivité par récurrence.

(viii) Par récurrence en utilisant (v).

II Probabilité sur un univers fini.

Théorème 1 - Distribution de probabilité sur les événements élémentaires.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble (fini) et $(p_1, \dots, p_n) \in [0;1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Et alors

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Démonstration 2

Remarques.

1. Lien avec la fonction de masse.

III Probabilité conditionnelle.

Définition.

Définition 4

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, nous appellerons *probabilité de A sachant B*, et nous noterons $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$, le réel :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

L'application $\mathbb{P}_B : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ qui à tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration 3

Remarques.

1. Pour être généralisée à un univers quelconque cette définition nécessiterait de prendre en compte la tribu sur laquelle la probabilité est définie.
2. Les probabilités conditionnelles n'ont d'intérêt que lorsque les événements considérés ne sont pas indépendants (voir ci-après).

Exercice 2

On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égal à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?

Probabilités totales.

Théorème 2 - Formule des probabilité totales

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1,\ldots,A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Démonstration 4

Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

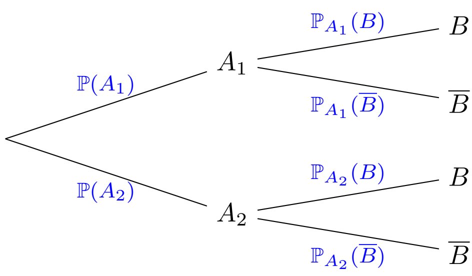
$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap A_k \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap A_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \cap A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat qui est vu en classe terminale est en général utilisé dans le cas d'arbres probabilistes. Il s'agit le plus souvent de retrouver la probabilité d'un événement qui apparaît dans plusieurs chemins :



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B).$$

2. Il n'est pas indispensable d'avoir un système complet d'événements. Il suffit d'événements disjoints deux à deux dont la réunion contient B. Autrement dit plutôt que : $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, il suffit de $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \supset B$. En effet dans ce cas : $B = B \cup \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$.

Exercice 3

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 4

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.

Formule de Bayes.

Théorème 3 - Formule Bayes

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement tel que : $\mathbb{P}(B) > 0$.

(i) Quelque soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1,\ldots,A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Exercice 5

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

On suppose que le second tirage a donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule blanche ?

Formule des probabilités composées.

Théorème 4 - Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,\ldots,A_n) \in (\Omega)^n$.

Si

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$$

alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|a_1 \cap \ldots A_{n-1})$$

Démonstration 5

Justifions l'existence des probabilités conditionnelles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Quelque soit $k \in [\![1,n]\!]$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_k$.
Donc du fait de la croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$$

Or

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n),$$

donc

$$\forall k \in [\![1,i]\!],\ \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$$

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A_2|A_1),\ldots,\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ existent bien.

Montrons : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Remarquons un télescopage des termes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(A_k \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}} \\
&= \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})
\end{aligned}$$

Ainsi

quelque soit $i \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1})$$

Remarques.

1. Nous retrouvons le résultat appelé principe multiplicatif (ou principe des bergers) utilisé pour calculer la probabilité d'un chemin sur un arbre probabiliste au lycée, $A_1 \cap \cdots \cap A_i$ désignant un chemin sur l'arbre probabiliste.

Exercice 6

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

IV Événements indépendants.

Définition 5

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$.

A et B sont dits *indépendants* si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarques.

1. Ainsi des événements sont indépendants si le principe des bergers s'applique à eux.

Définition 6

Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$.

Nous dirons que $A_1,\dots,A_n$ sont *indépendants* si et seulement si pour toute partie I de $[\![1,n]\!]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Remarques.

1. Cette notion d'indépendance est plus forte que l'indépendance deux à deux : si les (A_i) sont indépendants alors ils sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse.

V Exercices.

Exercice 7

On fait l'hypothèse que la probabilité de mettre au monde une fille est de $\frac{1}{2}$.

M. X et Mme Y ont deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient deux filles ?

On arrive chez eux. Un enfant ouvre la porte. C'est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?

Et si en plus, elle nous dit qu'elle est l'aînée, quelle est la probabilité que la seconde soit une fille ?

Exercice 8

Une urne contient 9 boules, numérotées de 1 à 9.

On tire deux boules.

Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas et on tire une deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet et on tire une deuxième boule.

Exercice 9

Une boîte contient deux boules, une rouge et une noire.

On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant à chaque fois et en notant sa couleur.

On note A_n l'évènement : « on obtient des boules des deux couleurs au cours de n tirages », et B_n : « on obtient au plus une boule noire ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
2. A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 10

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades.

Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné.

Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 11

On range au hasard 7 dossiers numérotés de 1 à 7 dans 5 tiroirs a, b, c, d, e.

Quelle est la probabilité des évènements suivants ?

1. Les 7 dossiers sont dans un même tiroir.
2. Les 7 dossiers sont dans 2 tiroirs exactement.
3. Les 7 dossiers sont dans 3 tiroirs exactement.

4. Les 7 dossiers sont dans 4 tiroirs exactement.
5. Aucun des tiroirs n'est vide.

Exercice 12

Un jeu de cartes est constitué de 20 cartes dont 17 portent le numéro 0 et 3 le numéro 1.

Un joueur tire au hasard simultanément 4 cartes de ce jeu ; il gagne s'il obtient au moins deux 1.

Quelle est la probabilité qu'il gagne ?

Exercice 13

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$.
Trouver les valeurs maximales et minimales de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 14

On jette trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité pour que l'équation du second degré ait :

1. deux racines réelles distinctes,
2. une racine réelle double,
3. pas de racines réelles.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On lance n fois un dé équilibré. Les lancers sont supposés indépendants.

On s'intéresse aux nombres de lancers dont le résultat est pair, ainsi qu'au nombre de lancers dont le résultat est 1.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient k nombres pairs », B_k l'événement « on obtient k "1" » et C_k l'événement « on obtient un nombre de pairs ou de "1" égal à k ».

Par exemple la suite de 5 lancers : 1, 5, 3, 2, 1 réalise les événements A_1, B_2 et C_3.

1. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(A_0 \cap B_0)$ puis $\mathbb{P}(C_0)$. Les événements A_0 et B_0 sont-ils indépendants ?
3. Déterminer $\mathbb{P}(A_1 \cap B_0)$, $\mathbb{P}(A_0 \cap B_1)$, puis $\mathbb{P}(C_1)$.
4. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(C_k)$.

VI Arbre de probabilité.

Définition 7

Un *arbre de probabilité* est un graphe orienté et pondéré vérifiant

(i) La somme des pondérations (ou probabilités) des branches issues d'un même sommet donne 1.

(ii) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.

(iii) La pondération de la branche allant du sommet A vers le sommet B est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est déjà réalisé $\mathbb{P}_A(B)$.

Remarques.

1. Le (ii) est appelé principe multiplicatif ou principe des bergers.