

Dans cette leçon \mathbb{K} désigne \mathbb{C} ou \mathbb{R} .

Séries entières.

Définition 1

Nous appellerons *série entière* toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$:

$$\begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ z & \mapsto a_n z^n \end{cases} \text{ où } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Nous noterons alors $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ la série entière.

Exemples.

1. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à support fini alors la série entière est une fonction polynomiale. Ainsi toutes les fonctions polynomiales sont des séries entières.
- 2.

Remarques.

1. La notation est celle des séries de nombres mais il s'agit bien de séries de fonctions.
2. On pourrait envisager une variable réelle et des coefficients complexes.
3. La notation $\sum_{n \geq p} a_n z^n$ signifie : $\forall k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, a_k = 0$.

Lemme 1 d'Abel.

Soit $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ une série entière à coefficients dans \mathbb{K} .

S'il existe $(z_0, Z) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_0| < |Z|$ et $(a_k Z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée alors $\sum_{k \geq 0} a_k z_0^k$ converge absolument.

Démonstration

$(a_k Z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall k \in \mathbb{N}, |a_k Z^k| \leq M.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |a_n z_0^n| &= |a_n Z^n| \cdot \left| \frac{z_0}{Z} \right|^n \\ &\leq M \left| \frac{z_0}{Z} \right|^n \end{aligned}$$

La série géométrique $\sum_{k \geq 0} \left| \frac{z_0}{Z} \right|^n$ est convergente puisque $\left| \frac{z_0}{Z} \right| < 1$, on en déduit par comparaison la convergence de $\sum_{k \geq 0} |a_k z_0^k|$. ■

Définition 2

Nous appellerons *rayon de convergence* d'une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ le nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ défini par

$$R = \sup \{ \rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

Remarques.

1. Cette borne supérieure existe bien puisqu'il s'agit d'une partie non vide de \mathbb{R} donc la borne supérieure dans \mathbb{R} existe si l'ensemble est majoré sinon la borne supérieure est $+\infty$.
- 2.

Théorème 1

Soient :

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
- R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$,
- $\mu \in \mathbb{K}$.

- (i) Si $|\mu| < R$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n \mu^n$ converge absolument.
(ii) Si $|\mu| > R$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n \mu^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

(i) Soit $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $|\mu| < R$ (en admettant qu'il existe).

$\sum_{n \geq 0} a_n \mu^n$ converge absolument.

Puisque $R = \sup \{ \rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$: il existe $r \in]|\mu|; R[$ tel que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Autrement dit :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n r^n| \leq M.$$

Ceci nous permet d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |a_n \mu^n| &= |a_n r^n| \cdot \left| \frac{\mu}{r} \right|^n \\ &\leq M \left(\frac{|\mu|}{r} \right)^n \quad (1) \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq |\mu| < r$, la série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} M \left(\frac{|\mu|}{r} \right)^n$ est convergente. Nous en déduisons, d'après l'inégalité (1), par comparaison de la convergence des séries à termes dans \mathbb{R}_+ , que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n \mu^n|$ converge.

$\sum_{n \geq 0} a_n \mu^n$ converge absolument.

■