Langage ensembliste.

Caser et parler des paradoxes de la théorie des ensemble :
— Antinomie de Russell.

I Notion intuitive d'ensemble.

Intuitivement un ensemble est comme un sac contenant des objets. Un ensemble est une collection d'objets.

Un objet d'un ensemble est appelé un *élément*.

On peut définir un ensemble E en énumérant de façon exhaustive les éléments qu'il contient : $E = \{1;\ -4; \pi\}$ (définition en extension). E regroupe alors uniquement ces trois éléments.

Il est possible de définir un ensemble par une propriété que ses éléments sont les seuls à vérifier. Nous parlerons alors de définition par compréhension. Par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ est l'ensemble des entiers naturels qui vérifient la propriété d'être plus grands ou égaux à 2.

Un ensemble avec un unique élément est appelé un *singleton*. Un ensemble contenant deux éléments est appelé une *une paire.*

II Appartenance.

Si E est un ensemble et x un objet pris dans cet ensemble, nous dirons que *x appartient à E* et nous noterons $x \in E$. Nous dirons aussi que x est un élément de E.

Si un objet x n'appartient pas à un ensemble E nous noterons : $x \notin E$.

L'ensemble vide, que nous noterons $\varnothing$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

III Inclusion.

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.

Nous dirons que *F est inclus dans E*, et nous noterons $F \subseteq E$, si et seulement si

$$\forall x \in F,\, x \in E$$

Remarques.

1. Autrement dit tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.
2. Nous dirons encore F est un sous-ensemble de E.
3. Nous dirons également que F est une *partie* de E.
4. L'ensemble des toutes les parties de E sera noté $\mathscr{P}(E)$. Nous avons alors

   $$F \subseteq E \Leftrightarrow F \in \mathscr{P}(E)$$

   et

   $$x \in E \Leftrightarrow \{x\} \in \mathscr{P}(E)$$

   L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$, comme le montre la proposition suivante.
5. Un paradoxe usuel est celui de l'ensemble de tous les ensembles.

Proposition 1 - Propriétés de l'inclusion.

Soient E, F, G des ensembles.

(i) Plus petit ensemble.

$$\varnothing \subseteq E$$

(ii) Réflexivité.

$$E \subseteq E$$

(iii) Transitivité.

$$\begin{cases} E \subseteq F \\ F \subseteq G \end{cases} \Rightarrow E \subseteq G$$

(iv) Anti-symétrie.

$$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subseteq F \\ F \subseteq E \end{cases}$$

IV Opérations sur les ensembles.

Les opérations ci-dessous sont définies dans $\mathscr{P}(E)$ mais pourraient être définies pour n'importe quel couple d'ensembles.

Intersection.

Définition 2

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

L'intersection de A et de B est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Remarques.

1. Autrement dit $A \cap B$ est formé des éléments qui appartiennent à A et à B, aux deux simultanément.
2. Si $A \cap B = \varnothing$ alors nous dirons que *A et B sont disjoints*.

Proposition 2 - Propriétés de l'inclusion

Soient E un ensemble, $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$.

(i) $\cap$ est commutative.

$$A \cap B = B \cap A$$

(ii) $\cap$ est associative.

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iii) $\varnothing$ est absorbant pour $\cap$.

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

(iv) E est neutre pour $\cap$.

$$E \cap A = A$$

(v) Tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est idempotent pour $\cap$.

$$A \cap A = A$$

(vi) Caractérisation de l'inclusion.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Remarques.

1. Pour la propriété (v) nous dirons aussi que l'intersection est une opération involutive.

Réunion.

Définition 3

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

La réunion de A et de B est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Remarques.

1. Autrement dit $A \cup B$ est formé des éléments qui appartiennent à A ou à B, *i.e.* à l'un, à l'autre ou au deux.

Proposition 3 - Propriétés de la réunion

Soient E un ensemble, $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$.

(i) $\cup$ est commutative.
$$A \cup B = B \cup A$$

(ii) $\cup$ est associative.
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

(iii) $\varnothing$ est neutre pour $\cup$.
$$A \cup \varnothing = A$$

(iv) E est absorbant pour $\cup$.
$$E \cup A = E$$

(v) Tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est idempotent pour $\cup$.
$$A \cup A = A$$

(vi) Caractérisation de l'inclusion.
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Remarques.

1. Pour la propriété (v) nous dirons aussi que la réunion est une opération involutive.

Réunion et intersection.

Proposition 4

Soient E un ensemble, $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$.

(i) Distributivité de $\cup$ sur $\cap$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap A \cup C)$$

(ii) Distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup A \cap C)$$

Le complémentaire.

Définition 4

Soient E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$.

Le complémentaire de A dans E est l'ensemble

$$\complement_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Remarques.

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté le complémentaire de A dans E est noté $\overline{A}$ ou A^c.

Proposition 5 - Propriétés du complémentaire

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

(i) E et $\varnothing$ sont symétriques par complémentation.

$$\complement_E(\varnothing) = E \quad \text{et} \quad \complement_E(E) = \varnothing$$

(ii) La complémentation est idempotente.

$$\complement_E(\complement_E(A)) = A$$

(iii) Lois de De Morgan.

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B) \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$$

Remarques.

1. Pour la propriété (ii) nous dirons aussi que le passage au complémentaire est une opération involutive.

Réunion et intersection quelconques.

Partie à développer mais en relation avec la logique et les calculs de prédicats ou l'axiome du choix.

Définition 5

Soient E un ensemble, I un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in E^I$.

La *réunion de la famille $(A_i)_{i\in I}$* est l'ensemble

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

L'*intersection de la famille $(A_i)_{i\in I}$* est l'ensemble

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}$$

avec par convention : $I = \varnothing \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} A_i = E$.

Proposition 6

Soient E un ensemble, I un ensemble, $(A_i)_{i\in I} \in E^I$ et $B \in E$.

(i) Distributivité.

$$B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i) \quad \text{et} \quad B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$$

(ii) Lois de De Morgan.

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

La différence (ensembliste).

Définition 6

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

La différence de A et de B est l'ensemble

$$A \setminus B = \{x \in E \mid (x \in A) \land (x \notin B)\}$$

Proposition 7 - Propriétés de la différence

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

(i)

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

(ii) Caractérisation de la complémentation.

$$\complement_E(A) = E \setminus A$$

(iii) $\varnothing$ est neutre à droite pour $\setminus$.

$$A \setminus \varnothing = A$$

(iv) Caractérisation de l'inclusion.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$$

(v) Caractérisation de la différence par le complémentaire.

$$A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$$

La différence symétrique.

Définition 7

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

La différence symétrique de A et de B est l'ensemble

$$A \Delta B = \{x \in E \mid (x \in A \setminus B) \lor (x \in B \setminus A)\}$$

Remarques.

1. Autrement dit : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Proposition 8 - Propriétés de la différence symétrique

Soient E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

(i) Δ est commutative.
$$A \Delta B = B \Delta A$$

(ii) $\varnothing$ est neutre pour Δ.
$$A \Delta \varnothing = A$$

(iii) Tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est son propre symétrique.
$$A \Delta A = \varnothing$$

(iv) Caractérisation de la différence symétrique.
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

V Partition.

VI Produit cartésien.

Couples.

Définition 8

Soient :

. E un ensemble,

. x et y des éléments de E.

Nous appellerons *couple* (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 9 - Caractérisation du couple

Soient :

. E un ensemble,

. x_1, y_1, x_2 et y_2 des éléments de E.

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

1. Ainsi une couple est une paire ordonnée. C'est souvent avec cet aspect que sont présentés et introduits les couples.

Produit cartésien de deux ensembles.

Définition 9

Soient :

. E et F deux ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien* des ensembles E et F, l'ensemble noté $E \times F$ et définie par :

$$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Proposition 10 - Propriétés du produit cartésien de deux ensembles.

Soient E, F et G trois ensembles.

(i) $E \times F = \varnothing \Longleftrightarrow (E = \varnothing \text{ ou } F = \varnothing)$.

(ii) $E \times F = F \times E \Longleftrightarrow (E = \varnothing \text{ ou } F = \varnothing \text{ ou } E = F)$.

(iii) $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$.

(iv) $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$.

(v) $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

Remarques.

1. En général : $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.

n-uplet et produit cartésien.