Intégrales impropres.

Les intégrales impropres ne constituent pas une nouvelle intégration mais un prolongement de l'intégrale de Riemann dans des cas particuliers en utilisant la notion de limite de fonction.

Cette leçon ne concerne que des fonctions numériques réelles.

Cette leçon consiste en fait à étudier les limites des fonctions primitives. Nous utiliserons donc les résultats sur les limites de fonctions, les primitives, les comparaisons asymptotiques de fonctions lors du passage à l'intégrale.

I Intégrale impropre d'une intégrande à valeurs réelles.

Définition.

Définition 1

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Nous dirons que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge* si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie en b^-.

Dans le cas contraire nous dirons que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *diverge*.

Remarques.

1. Les intégrales impropres sont aussi appelées les intégrales généralisées.
2. Une fonction est continue par morceaux si elle admet un nombre fini de points de discontinuité sur son ensemble de définition et qu'elle est prolongeable par continuité (des deux côtés) en chacun de ses points de discontinuité.
3. Ainsi une intégrale généralisée peut être un objet de différentes natures : un nombre (cas convergent), un infini (cas d'une divergence vers ∞), une divergence (cas divergent sans limite).
4. Nous appellerons *nature* de l'intégrale impropre le fait qu'elle est convergente ou divergente.
5. Nous définirons évidemment l'intégrale impropre $\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
6. Nous pourrions également définir une intégrale impropre en ses deux bornes. Pour cela il suffit d'utiliser la relation de Chasles pour se ramener à deux intégrales impropres en une seule borne chacune.

7. Il est même possible d'envisager une intégrale impropre ayant de nombreux points de discontinuité (en nombre fini) nécessitant une recherche de limite.
8. La relation de Chasles ne fonctionne pour les intégrales impropres que si toutes les intégrales impropres concernées sont convergentes.

Exemples.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre divergente vers $+\infty$. En effet, si $x \in [1;+\infty[$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente vers 1. En effet, si $x \in [1;+\infty[$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{x}+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. $\int_0^{+\infty} \cos(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre divergente sans limite. En effet, si $x \in [0;+\infty[$, alors $\int_0^{+\infty} \cos(t)\ \mathrm{d}t = \sin(x)$ qui diverge sans limite.
4. $\int_0^1 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre qui diverge vers $+\infty$ puisque si $x \in]0,1]$ alors $\int_x^1 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = -\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
5. Si les intégrales considérées ne sont pas convergentes la relation de Chasles n'est en général pas possible.
6. Exemples de relation de Chasles possible.

Exercice 1

Montrez que si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ alors

Exemple de Riemann.

Théorème 1 - Exemple de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration 1

(i) Distinguons trois cas.

* Supposons $\alpha > 1$.
  Dans ce cas d'après le théorème fondamental de l'analyse quelque soit $x \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)x^\alpha}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{(-\alpha+1)x^{\alpha+1}} - \frac{1}{(-\alpha+1)1^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{(-\alpha+1)x^{\alpha+1}} - \frac{1}{-\alpha+1}\end{aligned}$$

  Par conséquent et puisque $\alpha > 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{-\alpha+1}.$$

  Ainsi l'intégrale impropre $\int 1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est convergente et converge vers $-\frac{1}{-\alpha+1}$.
* Supposons $\alpha < 1$.
  En procédant comme ci-dessus nous voyons que dans ce cas l'intégrale impropre $\int 1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est divergente et à pour limite $+\infty$.
* Supposons $\alpha = 1$.
  Nous retrouvons un exemple déjà étudié.
  $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre divergente vers $+\infty$. En effet, si $x \in [1; +\infty[$, alors $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Nous avons donc établi grâce aux trois points précédents que si l'intégrale impropre converge alors nécessairement $\alpha > 1$. Le premier point établi la réciproque.

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

(ii) Il est possible de reprendre la précédente démonstration en l'adaptant. Il est également possible de procéder au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Remarques.

1. C'est un exemple simple qui nous servira d'élément de comparaison pour vérifier la convergence d'autres intégrales impropres.
2. Il n'est pas ici question des fonctions Riemann-intégrables mais d'un exemple associé à Riemann.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

Exercice 3

Démontrez que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente et déterminez sa valeur.

Un cas particulier qui se simplifie.

Proposition 1 Intégrale faussement généralisée.

Soient :

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (donc b est réel ici) avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Si f est prolongeable par continuité en b^-, alors, en notant $\tilde{f}$ son prolongement en b^-, nous pouvons affirmer que

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration 2

Démontrons que $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}\, \mathrm{d}t$.

Nous allons majorer la différence des intégrales par une fonction qui converge vers 0 quand x tend vers b^-.

Quelque soit $x \in [a,b[$, d'après la relation de Chasles,

$$\left| \int_a^b \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^b \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

Assurons nous que nous pouvons utiliser l'inégalité des accroissements finis.

* $x \mapsto \int_x^b \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$.
* $\tilde{f}$ est dérivable sur $]a,b[$.
* $\tilde{f}$ étant continue en b il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in [a,b[,\ |b - x| < \eta \Rightarrow \left| \tilde{f}(x) \right| < M.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$$\left|\int_x^b \tilde{f}(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M|b-x|.$$

Et puisque $|b-x| \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} 0$ finalement $\left|\int_x^b \tilde{f}(t)\ \mathrm{d}t\right| \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} 0.$

L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge vers $\int_a^b \tilde{f}(t)\ \mathrm{d}t.$

Remarques.

1. Ainsi, si f est prolongeable par continuité en b alors l'intégrale impropre est convergente.
2. Ce résultat n'est valable que si b est un réel et pas si $b = \pm\infty$.

Exemples.

1.
2. Exemple de $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ divergente avec f prolongeable par continuité en $+\infty$.

Exercice 4

Démontrez que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Linéarité.

Proposition 2 Linéarité

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions fonctions continues par morceaux.

Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f + g)(t)\ \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration 3

Soit $x \in [a,b[$.

Par linéarité de l'intégrale de Riemann

$$\lambda \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x (\lambda f + g)(t)\ \mathrm{d}t.$$

Puisque $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes : $\int_a^x (\lambda f+g)(t)\ \mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarques.

1. Puisqu'il s'agit de limites de fonctions (les primitives) nous retrouvons tous les problèmes d'indétermination des limites de fonctions c'est pourquoi cette proposition n'est pas généralisable au cas d'intégrales impropres divergentes.

Exemples.

1. Si les intégrales considérées ne sont pas convergentes la linéarité n'est en général pas possible : $\int_0^{+\infty} [1 + (-1)]\ \mathrm{d}t$ converge mais $\int_0^{+\infty} 1\ \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} -1\ \mathrm{d}t$ ne sont divergentes.

II Propriétés relatives à l'ordre (intégrande réelle) pour des intégrales impropres convergentes.

Proposition 3 Positivité de l'intégrale généralisée.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente et si $f \geqslant 0$, alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Démonstration 4

Puisque $f \geqslant 0$, par croissance de l'intégrale de Riemann, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$. Donc en passant à la limite quand x tend vers b^- dans l'inégalité : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Corollaire 1 - Comparaison des intégrales en cas de convergence

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.

Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes et si $f \geqslant g$, alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration 5

Appliquer la proposition précédente à la fonction $f - g$.

Proposition 4 Intégrale impropre convergente nulle

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f \geqslant 0$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$ sur $[a,b[$.

Démonstration 6

Soit $x \in [a,b[$.

Démontrons que $f(x) = 0$.

$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge donc $\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge aussi et nous pouvons décomposer avec la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

* Puisque f est continue et $f \geqslant 0$ par croissance de l'intégrale de Riemann : $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
* Puisque $\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et que $f \geqslant 0$ d'après une proposition précédente : $\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
* Par hypothèse $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Nous déduisons des trois points précédents que $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Puisque f est continue sur $[a,x]$, que $f \geqslant 0$ et que $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, (d'après un résultat sur les intégrales de Riemann) : $f(x) = 0$.

Nous avons démontré que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b[$.

Remarques.

1. Ce résultat ne se généralise pas à une fonction continue par morceaux car f peut alors prendre un nombre fini de valeurs non nulles (en les points de discontinuités).
2. En particulier si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue, que $\int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t$ (respectivement $\int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t$) converge et que $\int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$ (respectivement $\int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t = 0$) alors $f = 0$.

Exemples.

1. Exemple d'une fonction qui n'est pas continue mais localement intégrable et pour laquelle le théorème ne fonctionne pas.

III Critère de Cauchy de convergence.

Critère de Cauchy.

Proposition 5 - Critère de Cauchy pour une intégrale impropre

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in [a,b[,\ \forall (x_1,x_2) \in]\eta,b[^2,\ \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Démonstration 7

Il s'agit d'une application directe du critère de Cauchy de convergence d'une fonction réelle appliqué à la fonction primitive $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarques.

1. C'est un outil plus théorique que réellement pratique. Nous l'utiliserons pour démontrer que la convergence absolue implique la convergence des intégrales impropres (notamment pour les intégrandes à valeurs dans un espace de Banach).

Règle d'Abel.

Proposition 6 - Règle d'Abel.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux,

. $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ est décroissante et de limite nulle.

Si $x \mapsto \int_a^x g$ est bornée, alors l'intégrale impropre $\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration 8

Soit $\varepsilon > 0$. $F : x \mapsto \int_a^x f$, $|F| \leqslant M$. $\exists \eta_\varepsilon \in [a,b[$, $g \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$.

D'après la deuxième formule de la moyenne $\forall [x,y] \subset [a,b[$, $\int_x^y fg = (F(z) - F(x))g(x)$.

Donc $\forall [x,y] \subset [\eta_\varepsilon,b[$, $\left|\int_x^y fg\right| \leqslant 2Mg(x) \leqslant \varepsilon$ donc le critère de Cauchy est satisfait.

Remarques.

1. Dans le cas où g est absolument continue (en particulier si elle est $\mathcal{C}^1$) on peut aussi utiliser une intégration par parties pour démontrer le résultat.

Exercice 5

Démontrez que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

IV Intégrale généralisée avec une intégrande à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Dans le paragraphes précédent nous avons étudié la convergence des intégrales impropres pour des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Nous souhaitons maintenant pouvoir intégrer des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel quelconque (notamment $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). Nous allons utiliser l'absolue convergence qui consiste à considérer $|f|$ comme intégrande. Il faut par conséquent s'intéresser de près aux cas des intégrandes positives.

Comparaison par inégalité sur les intégrandes.

Lemme 1 - Intégrale impropre bornée

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, avec $f \geqslant 0$.

L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a,b[, \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant M.$$

Démonstration 9

Puisque $f \geqslant 0$, l'application $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante. La fonction F_a étant croissante, elle admet une limite finie en b^- si et seulement si elle est majorée.

Remarques.

1. Ce résultat ne permet pas de déterminer la valeur de l'intégrale mais permet simplement de s'assurer que l'intégrale impropre est convergente ou pas. Il permet tout au plus d'en obtenir une majoration.

Théorème 2 - Comparaison d'intégrandes positives.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux, avec $f \geqslant 0$ (et $g \geqslant 0$).

Si $f \leqslant g$ et si $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente.

Démonstration 10

Démontrons que $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente en utilisant le précédent lemme.

Soit $x \in [a,b[$.
Puisque $f \leqslant g$ par croissance de l'intégrale de Riemann

$$\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t. (1)$$

Puisque $g \geqslant 0$, $x \mapsto \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$ est croissante et puisque l'intégrale impropre $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente :

$$\forall x \in [a,b[, \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t. (2)$$

Par transitivité entre (1) et (2) nous en déduisons :

$$\forall x \in [a,b[, \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Nous pouvons alors conclure avec le lemme précédent :

$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

Remarques.

1. Par contraposition de la proposition nous pouvons établir la divergence d'intégrales impropres : si $f \leqslant g$ et si $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.
2. On peut se contenter d'avoir $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de b^- et nous obtenons quand même la convergence. Par contre nous perdons la majoration de l'intégrale impropre : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.
3. Ce résultat ne permet pas de déterminer la valeur de l'intégrale mais permet simplement de s'assurer que l'intégrale impropre est convergente ou pas. Il permet tout au plus d'en obtenir une majoration.
4. Le fait que la convergence absolue (vue plus loin) implique la convergence permet de se contenter de l'hypothèse $g \geqslant 0$ en ignorant celle sur le signe de f.

Exercice 6

Déterminez la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

Correction exercice 6

Démontrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Vérifions que nous pouvons utiliser la proposition précédente.

* $\forall x \in [1,+\infty[, \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$.
* $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{x^2} \geqslant 0$ quelque soit $x \in [1,+\infty[$.
* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente puisqu'il s'agit de l'exemple de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

D'après la proposition de majoration précédente

$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

Exercice 7

Démontrez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente.

Correction exercice 7

$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Exercice 8

Déterminez la nature de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Correction exercice 8

Intégration par parties puis comparaison avec l'exemple de Riemann.

Proposition 7 - Exemple de Bertrand

Soient :

. $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

(i) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

(ii) $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{x^\alpha |\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si : $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Démonstration 11

Démontrons l'assertion (i) par disjonction des cas.

Distinguons les différents cas.

* Supposons que $\alpha = 1$.

(a) Supposons que $\beta \neq 1$.

Soit $x \in [\mathrm{e}, +\infty[$.

Les fonctions considérées étant $\mathcal{C}^1$, en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}}\right]_{\mathrm{e}}^{x}\\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - 1\right)\end{aligned}$$

$\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}}$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

(b) Supposons que $\beta = 1$.
Soit $x \in [\mathrm{e}, +\infty[$.
Les fonctions considérées étant $\mathcal{C}^1$, en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{1}{t \ln t} \,\mathrm{d}t &= [\ln \circ \ln t]_{\mathrm{e}}^{x} \\ &= \ln \circ \ln x\end{aligned}$$

$\ln \circ \ln x$ diverge vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

* Supposons $\alpha > 1$.
Vérifions les conditions de la proposition de comparaison des intégrandes positives.

. $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ sont positives et continues sur $[\mathrm{e}, +\infty[$,

. $\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[$, $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$,

. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$ converge (exemple de Riemann).

D'après le théorème de comparaison des intégrales impropres d'intégrandes positives, $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}$ converge.

* Supposons $\alpha < 1$.
Vérifions les conditions de la proposition de comparaison des intégrandes positives (dont nous allons utiliser la réciproque).

. $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1} (\ln x)^\beta}$ sont positives et continues sur $[\mathrm{e}, +\infty[$,

. $\forall x \in [\mathrm{e}, +\infty[$, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha-1} (\ln x)^\beta}$,

. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$ diverge (exemple de Riemann).

D'après le théorème de comparaison des intégrales impropres d'intégrandes positives, $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}$ converge.

En reprenant les différents cas traités :

$$\boxed{\begin{gathered}\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si :} \\ \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).\end{gathered}}$$

Pour démontrer le (ii), nous pouvons procéder au changement de variable $u = \frac{1}{t}$ car $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\mathrm{e}, +\infty[& \to & \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \\ t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarques.

1. Le choix de la borne $\frac{1}{\mathrm{e}}$ permet de simplifier la rédaction de la démonstration en procédant à un changement de variable qui ramène exactement au cas précédent.
2. En utilisant l'ordre lexicographique nous pouvons dire $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $(1{,}1) < (\alpha{,}\beta)$.
   Il est d'ailleurs possible de généraliser ce résultat : $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta (\ln \circ \ln t)^\gamma}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $(1{,}1{,}1) < (\alpha{,}\beta{,}\gamma)$. Et il est possible de recommencer en considérant les composées successives par ln.
3. Le cas de la borne en 1 de l'intégrale est toujours divergent.

Comparaison par prépondérance sur les intégrandes.

Proposition 8- Nature de l'intégrale impropre par prépondérance sur l'intégrande.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f{,}g : [a{,}b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux, avec $g \geqslant 0$ et $f \geqslant 0$.

Supposons : $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}\,(g)$

(i) Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge également.

(ii) Si l'intégrale impropre $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge également.

Démonstration 12

Démontrons les implications en utilisant la proposition de majoration vu précédemment.

Démontrons le (ii).

* Puisque $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}\,(g)$, $f - g \underset{b^-}{=} \mathrm{o}\,(g)$, quelque soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in [a{,}b[$ tel que : $\forall x \in [\eta{,}b[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.
  Donc $\forall x \in [\eta{,}b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon g(x)$
* Vérifions que les conditions d'utilisation de la proposition de comparaison des intégrandes positives sont réunies.
  . f et g sont continues par morceaux sur $[eta{,}b[$ et $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ sur $[\eta{,}b[$.
  . $f \leqslant g$ sur $[\eta_3{,}b[$.
  Ainsi, d'après la proposition sur la majoration de l'intégrale impropre, si $\int_\eta^b g(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente il en est de même pour $\int_\eta^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

* Nous en déduisons avec la relation de Chasles qu'il en est de même pour les intégrales sur $[a,b[$.

Si l'intégrale impropre $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge également.

En considérant la contraposée de (ii) nous obtenons l'implication pour la divergence.

Remarques.

1. La condition sur le signe de f peut être contournée comme nous le verrons en étudiant plus loin la convergence absolue. En effet en enlevant la condition sur le signe de f nous obtenons quand même la convergence absolue, donc la convergence. Cependant la condition sur le signe de g est indispensable.

Exemples.

1. La condition sur le signe est indispensable. $\int 0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ converge, $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge et pourtant $\frac{|\sin t|}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$.

Comparaison par équivalence sur les intégrandes.

Proposition 9 - Nature de l'intégrale impropre par équivalence de l'intégrande.

Soient :

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux, avec $g \geqslant 0$ au moins au voisinage de b^-.

Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ alors les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration 13

Démontrons que les intégrales impropres sont de même nature en utilisant la proposition de majoration vu précédemment.

* Puisque $f \underset{b^-}{\sim} g$, $f - g = \underset{b^-}{\mathrm{o}}(g)$. Autrement dit, quelque soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in [a,b[$ tel que : $\forall x \in [\eta,b[$, $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.
En particulier ($\varepsilon = 1$) il existe $\eta_1 \in [a,b[$ tel que :

$$\forall x \in [\eta_1,b[,\ -|g(x)| \leqslant f(x) - g(x) \leqslant |g(x)|.$$

Et puisqu'au voisinage de b^-, g est positive, il existe $\eta_2 \in [a,b[$ tel que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [\eta_2,b[$.
Par conséquent en notant $\eta_3 = \max(\eta_1,\eta_2)$:

$$\forall x \in [\eta_3,b[,\ -g(x) \leqslant f(x) - g(x) \leqslant g(x).$$

Ou encore :

$$\forall x \in [\eta_3,b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 2g(x).$$

* Vérifions que les conditions d'utilisation de la proposition de comparaison des intégrandes positives sont réunies.

. f et g sont continues par morceaux sur $[\eta_3,b[$ et $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ sur $[\eta_3,b[$.

. $f \leqslant g$ sur $[\eta_3,b[$.

Ainsi, d'après la proposition sur la majoration de l'intégrale impropre, si $\int_{\eta_3}^{b} g(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente il en est de même pour $\int_{\eta_3}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$.

* Nous en déduisons avec la relation de Chasles qu'il en est de même pour les intégrales sur $[a,b[$.

* Puisque la relation d'équivalence asymptotique est une relation d'équivalence elle est symétrique et un raisonnement identique au précédent démontrerait que la convergence de $\int_{\eta_3}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$ implique celle de $\int_{\eta_3}^{b} g(t)\ \mathrm{d}t$.

* En considérant les contraposées nous établirions des implications semblables pour la divergence.

Remarques.

1. Du fait de l'équivalence des fonctions, la positivité de g impose celle de f au voisinage de b^-.
2. Ce résultat peut être vu comme un simple corollaire de la proposition précédente sur les intégrales impropres et les relations de prépondérance.
3. L'hypothèse $g \geqslant 0$ pourrait être remplacée par $g \leqslant 0$.
4. En choisissant $\eta = \frac{1}{2}$ la démonstration est raccourcie.
5. Ce résultat permet simplement de démontrer la convergence ou la divergence d'une intégrale impropre. Il ne permet pas de trouver l'intégrale en cas de convergence ; ni même une majoration. Nous pouvons cependant obtenir son éventuelle vitesse de convergence.

Exemples.

1. La condition sur le signe est indispensable. $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{|\sin t|}{t}$ et $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ sont équivalentes en $+\infty$ et pourtant de nature différente.

Exercice 9

Déterminez la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2+t+1}-(t+\lambda)\right)\,dt$ suivant les valeurs de λ.

Correction exercice 9

Il s'agit d'une intégrale impropre. Puisque l'intégrande $x \mapsto f_\lambda = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+\lambda)\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$, seule la borne infinie pose question.

La recherche d'une primitive est pour le moins hasardeuse. Essayons donc de nous assurer de la convergence de l'intégrale impropre. La recherche d'une majoration (élémentaire) de l'intégrale impropre ne permet pas de conclure. Essayons donc de déterminer un équivalent de l'intégrande.

Pour déterminer un développement limité de f_λ ramenons nous à un développement au voisinage de 0 :

$$f_\lambda(t) = \sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}} - \left(1+\frac{\lambda}{t}\right)$$

En utilisant le développement limité de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}} &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f_\lambda(t) &= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^2}-\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{1}{t}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

Il y a donc trois cas de figures à distinguer :

1. Si $\lambda > 0\frac{1}{2}$ alors $f_\lambda \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{1}{t}$.

   Vérifions les conditions de la proposition sur la nature de l'intégrale impropre en considérant un équivalent de l'intégrande :

   . f_λ et $g_\lambda : x \mapsto \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{1}{t}$ sont continues sur $[1,+\infty[$ et $g_\lambda \geqslant 0$.

   . D'après l'exemple de Riemann $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{1}{t}\,dt$ est une intégrale impropre divergente.

   Donc d'après la proposition précédente $\int_1^{+\infty} f_\lambda(t)\,dt$ est une intégrale impropre divergente.

2. Si $\lambda < \frac{1}{2}$, alors le résultat est le même que précédemment. Seul le signe de g_λ change.

3. Si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8}\frac{1}{x^2}$.
   Vérifions les conditions de la proposition sur la nature de l'intégrale impropre en considérant un équivalent de l'intégrande :
   . f_λ et $g : x \mapsto -\frac{1}{8}\frac{1}{t^2}$ sont continues sur $[1, +\infty[$ et $g \leqslant 0$.
   . D'après l'exemple de Riemann $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{8}\frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale impropre convergente.

   Donc d'après la proposition précédente $\int_1^{+\infty} f_{\frac{1}{2}}(t)\ dt$ est une intégrale impropre convergente.

$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\sqrt{t^2+t+1} - (t+\lambda)\right)\ dt \text{ est convergente si et seulement si } \lambda = \frac{1}{2}.}$

Exercice 10

Déterminez la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^6 - \left(1+\frac{3}{t}\right)^{2t}\ dt$.

Correction exercice 10

Notons $x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^6 - \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$. f est continue sur $[1, +\infty[$. Seule la borne infinie pose problème.

La recherche d'une primitive de l'intégrande semble difficile.

L'utilisation d'une majoration par une fonction dont l'intégrale impropre converge est peu évidente. Recherchons un équivalent de l'intégrande.

Puisque $1 + \frac{3}{x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f(x) = \mathrm{e}^6 - \exp\left(2x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right).$$

En utilisant le développement en 0 de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} 2x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) &= 2x\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2 + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 6 - \frac{9}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = \mathrm{e}^6\left[1 - \exp\left(-\frac{9}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

Par composition des développements limités :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^6\left[1 - \left(1 - \frac{9}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= \frac{9\mathrm{e}^6}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Enfin :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{9e^6}{x}$$

Vérifions les conditions de la proposition sur la nature de l'intégrale impropre en considérant un équivalent de l'intégrande :

. f et $g : x \mapsto \frac{9e^6}{x}$ sont continues sur $[1, +\infty[$ et $g \geqslant 0$.

. D'après l'exemple de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{9e^6}{x}\, dt$ est une intégrale impropre divergente.

Donc d'après la proposition précédente $\int_1^{+\infty} f\, dt$ est une intégrale impropre divergente.

$\int_1^{+\infty} e^6 - \left(1+\frac{3}{t}\right)^{2t}\, dt$ est une intégrale divergente.

Exercice 11

Montrez que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^4-1}}\, dt$ converge.

Comparaison avec l'exemple de Riemann.

Il s'agit de comparer l'intégrande avec l'exemple de Riemann. Nous utiliserons cette méthode lorsque ni la majoration ni l'équivalence ne fonctionnent pour déterminer la nature d'une intégrale impropre.

Proposition 10 Comparaison avec l'exemple de Riemann en $+\infty$

Soient :

. $a \in \mathbb{R}_+^*$,

. $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \geqslant 0$.

(i) S'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \in]-\infty,1[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

Démonstration 14

Démontrons (i) en comparant l'intégrande par prépondérance avec l'exemple de Riemann.

Vérifions les hypothèses de la proposition.

. f et $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont positives sur $[a, +\infty[$.

. $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

. D'après l'exemple de Riemann $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}tt$ est convergente car $\alpha > 1$.

Nous en déduisons

$$\boxed{\int_a^\infty f(t)\, \mathrm{d}tt \text{ est convergente.}}$$

Exercice 12

Démontrez que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ est (absolument) convergente pour toute fonction polynomiale P.

Proposition 11 - Comparaison avec l'exemple de Riemann en 0^+

Soient :

. $a \in \mathbb{R}_+^*$,

. $f :]0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \geqslant 0$.

(i) S'il existe $\alpha \in]-\infty,1[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$, alors $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration 15

Il est possible d'adapter la précédente démonstration. Il est également possible de procéder à un changement de variable d'intégration, $u = \frac{1}{t}$, pour se ramener à la question précédente.

V Convergence absolue d'une intégrale généralisée.

wiki avec exemples et exercices à piller. exercices.

Notion de convergence absolue.

Définition 2

Soient :
. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,
. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Nous dirons que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge absolument* si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Remarques.

1. Cette notion d'intégrabilité est cohérente avec celle de l'intégrale de Lebesgue.
2.

Convergence et convergence absolue de l'intégrale impropre.

Théorème 3 - Convergence et convergence absolue

Soient :
. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,
. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration 16

Démontrons l'implication.

* Démonstration dans le cas réel.

Remarquons que $0 \leqslant |f| - f \leqslant 2|f|$.

Par conséquent, si $\int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente, et puisque $|f| - f \geqslant 0$, d'après la proposition sur la comparaison des intégrandes, $\int_a^b |f|(t) - f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Nous en déduisons par linéarité de l'intégrale impropre dans le cas de convergence, que, puisque $f = |f| - (|f| - f)$, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

* Démonstration utilisant le critère de Cauchy donc transposable dans le cas des espaces vectoriels.

Justifions l'inégalité dans le cas de convergence.

1. Dans le cas réel.
   $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ et toutes ces fonctions sont convergentes donc d'après le résultat de comparaison des intégrales en cas de convergence : $\int_a^b -|f|(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t$. Autrement dit

   $$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f|(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. Dans le cas des espaces de Banach.

Remarques.

1. La réciproque est inexacte comme le montre l'exemple $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ (exercice plus loin).
2. Lorsqu'une intégrale impropre est convergente sans être absolument convergente, nous dirons qu'elle est *semi-convergente*. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ appelé *exemple de Dirichlet* est semi-convergente.

Exemples.

1.

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Correction exercice 13

Démontrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge absolument.

Quelque soit $x \in [1,+\infty[$: $\left|\frac{\sin(ax)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$. Nous en déduisons par comparaison (fonctions positives, continues par morceaux) avec l'exemple de Riemann, que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge absolument.

Enfin

l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 14

Exemple de Dirichlet.

1. Démontrez que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. Démontrez que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15

Démontrez que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ est convergente.

VI Inégalité de Cauchy-Schwartz des intégrales impropres.

VII Changement de variable dans une intégrale impropre.

Exercice 16

Prouvez la convergence et calculez l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

VIII Intégration par parties dans une intégrale impropre.

Exercice 17

Montrez que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculez sa valeur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18

Montrez que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculez sa valeur.

IX Fonction localement intégrable.

Définition 3

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

f est dite *localement intégrable* sur I si et seulement si elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I.

Remarques.

1. En particulier si f est continue sur I alors f est localement intégrable sur I.
2. Les fonctions continues par morceaux (fonctions discontinues en un nombre fini de points et prolongeables par continuité en les bornes de chaque intervalle ou elle est continue) sont localement intégrables.
3. Les fonctions monotones sont localement intégrables.
4. Les fonction réglées sont localement intégrables.
5. La notion d'intégrabilité (qui correspond à celle de Lebesgue) ne concerne que la converge absolue des intégrales généralisées. Nous verrons plus loin que certaines intégrales généralisées peuvent être convergentes sans être absolument convergente.

X Exemple e^{-x^2}.

XI Lien entre convergence de l'intégrale impropre et limite de l'intégrande en $+\infty$.

Limite finie non nulle ou infinie de l'intégrande.

Dans ce cas l'intégrale est évidemment divergente.

Limite nulle de l'intégrande et convergence de l'intégrale.

$\int_0^{+\infty} \sim (t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(n) = 2^n$, $f(n - 4^{-n}) = f(n + 4^{-n}) = 0$, f linéaire sur $[n-4^{-n}, n]$ et sur $[n, n+4^{-n}]$, f est nulle partout ailleurs. f admet une intégrale convergente vers 1, mais f ne tend pas vers 0 et n'est même pas bornée.

Limite nulle de l'intégrande et divergence de l'intégrale.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$

Exercice 19

Soit f une fonction uniformément continue sur $[a,+\infty[$. Démontrez que si $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

XII Intégrale généralisée d'une intégrande à valeurs dans un espace vectoriel de dimensions finie.

La différence majeure avec les intégrandes à valeur réelles tient au fait que ls espaces vectoriels ne sont *a priori* pas muni d'un bon ordre comme $\mathbb{R}$.

Définition.

Définition 4

Soient :

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$,

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to E$ une fonction continue par morceaux.

Nous dirons que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge* si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite finie en b^-.

Dans le cas contraire nous dirons que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ *diverge*.

Convergence.

Proposition 12 - Caractérisation de la convergence simple

Soient :

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$,

. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$,

. $f : [a,b[\to E$ une fonction continue par morceaux dont nous noterons $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées.

$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b f_i(t)\ \mathrm{d}t$ converge pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(t)\ \mathrm{d}t.$$

Cas complexe.

Exercice 20

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrez que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda > 0)$.

Exercice 21

Considérons la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = x\mathrm{e}^{ix^n}$ où $n \geqslant$ est un entier. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente avec $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

XIII Intégrale généralisée d'une intégrande à valeurs dans un espace de Banach ?

XIV Intégrale généralisée et intégrale de Lebesgue.

En gros : toute intégrale impropre convergente est Lebesgue-intégrable mais la réciproque est fausse.

XV Exemples : intégrale de Fresnel.

XVI Valeur principale de Cauchy.

XVII Étude d'une intégrale impropre.

Quand utiliser l'intégrale impropre ?

1. L'intégrande est localement intégrable (continue ou continue par morceaux le plus souvent).

2. L'une des bornes est
   (a) infinie,
   (b) une valeur en dehors de l'ensemble de définition de l'intégrande.

Comment déterminer sa nature ?

1.

Comment trouver sa valeur en cas de convergence ?

1.

XVIII Exercices.

Exercice 22

Calcul de l'intégral exemple de Dirichlet.

1. Montrez que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}$ 0.
2. Montrez que l'application f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Calculez pour tout $n\in\mathbb{N}$ $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.
4. On pose $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty}K_n=\int_0^{\frac{\text{ß}}{2}}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
5. Déduisez de ce qui précède que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 23

Fonction Γ d'Euler.

1. Montrez que $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrez que $\int_0^1\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x>0$.
3. Déduisez-en