Intégrale de Riemann.

I Introduction.

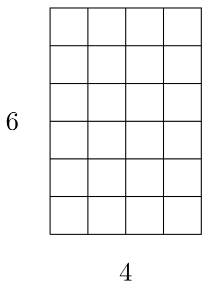
Quadrature.

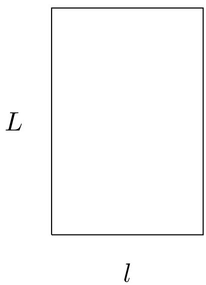
Le calcul d'intégrale relève des problèmes dits de quadratures, c'est-à-dire de calcul d'air. Cet cette idée qui sous-tend les développements du calcul intégrale. Les extensions doivent autant que possible satisfaire ce qu'intuitivement nous attendons d'un calcul d'aire (ou de volume).

En suivant les principes de Descartes nous commenceront par des calculs simples avant d'aller vers des situation de plus en plus complexes.

Aire du rectangle.

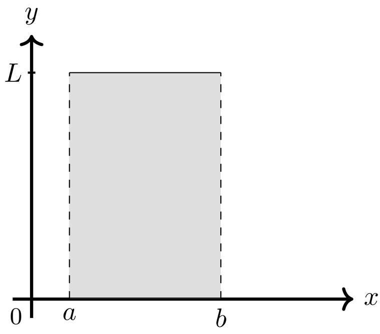
Nous savons que le calcul d'aire du rectangle correspond à un produit qui consiste *de facto* à dénombrer le nombre de carrés recouvrant le rectangle.





$\mathscr{A} = 6 \times 4$ $\qquad$ $\mathscr{A} = L \times l$

Il est alors possible de donner une interprétation utilisant les fonctions de ce calcul d'aire :



$$\mathscr{A} = L \times (b-a)$$

En notant f la fonction constante égale à L :

$$\mathscr{A} = (b-a) \times f.$$

Ce que nous noterons en utilisant le symbole $\int$ de somme :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f.$$

Définition 1

Soient

. $a < b$ deux réel,

. $L \in \mathbb{R}$,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à L.

Nous appellerons intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre réel

$$\int_a^b f = (b-a) \times L.$$

Remarques.

1. Ainsi $\int_a^b f$ désigne l'aire algébrique (positive ou négative suivant le signe de L) du rectangle délimité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et $y = L$.
2. Par convention nous noterons $\int_b^a f = -\int_a^b f$.
3. Afin de ne pas se limiter à des fonctions définies sur $[a,b]$ mais pour étendre la situation à $\mathbb{R}$ nous pouvons considérer f comme la restriction à $[a,b]$ de la fonction L. Et dans ce cas nous pouvons écrire : $\mathcal{A} = \int \mathbb{1}_{[a,b]}$ (ou $\int \chi_{[a,b]}$). Ce dernier point de vue sera préféré dans la construction des intégrales de Lebesgue.

Des contraintes sur l'extension des formules de calcul d'air.

Nous souhaitons que :

— l'aire de la réunion de parties disjointes soit la somme des aires des dites parties (linéarité empilement de surface qui ont été étirées et relation de Chasles correspondant des ajouts à droite et à gauche dans un repère),
— la positivité soit conservé, l'aire sous une courbe décrite par une fonction positive est encore positive (ce qui correspond à la croissance du fait de la linéarité).

II Fonctions en escalier.

Nous allons étendre le calcul d'intégrale d'une fonction constante sur un segment à des fonctions constantes par morceau sur un segment.

Généralités.

Définition 2

Soient :

. Soient $a < b$ deux réels,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Nous dirons que le fonction f est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision

Remarques.

1. Ainsi une fonction est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si elle est constante par morceaux sur $[a,b]$.
2. À moins d'être constante une fonction en escalier n'est pas continue.