Espace euclidien.

Un espace euclidien est un espace géométrique dans lequel il est possible de retrouver en les généralisant les règles et outils de la géométrie développés par Euclide.

I Produit scalaire.

Définitions.

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Nous appellerons *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que

(i) φ est *symétrique* : $\forall x,y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

(ii) φ est *linéaire par rapport à la deuxième place* : $\forall x,y,y' \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$.

(iii) φ est *positive* : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.

(iv) φ est *définie* : $\forall x \in E,\ (\varphi(x,x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$.

Remarques.

1. Cette définition se généralise sans difficulté à des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension infinie. Dans ce cas on parle d'espace préhilbertien.
2. (i) et (ii) équivalent à dire que φ est une forme bilinéaire symétrique. La définition choisie minimise les vérifications.
3. La définition peut donc être reformulée : φ est un produit scalaire si et seulement si φ est une forme bilinéaire symétrique, définie, positive.
4. Dans la suite nous noterons le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

Exemples.

1. *Produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^n$.

$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto \sum_{k=0}^{n} x_k y_k$$

ou, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$(X,Y) \mapsto {}^tXY$$

2. $(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. *Produit scalaire canonique sur* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}\,({}^tAB) \end{array}$$

4. Soient $a < b$ deux réels et $(f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^2$ (l'espace vectoriel des fonctions continue sur $[a,b]$). $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Cependant il ne correspond pas à la définition puisque l'espace considéré est de dimension infinie.
5.

Exercice 1

Montrer que si l'on associe à $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0$ deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P,Q\rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$ alors on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ appartenant à $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, φ un produit scalaire sur E, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\psi(x,y) = a\varphi(x,x) + b\varphi(x,y) + c\varphi(y,y)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur E.

II Espace euclidien.

Définition 2

Nous appellerons *espace euclidien* la donnée d'un couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E.

Remarques.

1. La donnée du produit scalaire permet de définir distance et angles, deux aspects fondamentaux de la géométrie euclidienne traditionnelle. Ce qui est une démarche contraire de celle historique et de celle de l'introduction dans le système scolaire de ces notions.
2. Tout espace vectoriel euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Nous travaillerons donc le plus souvent dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemples.

1. Soient $a < b$ deux réels. $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^2$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas un espace euclidien car il n'est pas de dimension finie.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E qui vérifient : $\forall (x,y) \in E^2 \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$. Montrer que f et g sont linéaire

III Norme euclidienne.

Définition 3

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Nous appellerons *norme euclidienne* la norme sur E définie par

$$||\cdot|| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array} \right.$$

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'il faut établir que la norme euclidienne est bien une norme.

Proposition 1 - Identités remarquables

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. $\forall (x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2$.
2. $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x+y, x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$.

Démonstration 1

Découle de la bilinéarité du produit scalaire.

Corollaire 1 - Identités de polarisation

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$.
2. $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$

Démonstration 2

Découle des identités remarquables.

Exercice 6

Démontrez l'*égalité du parallélogramme* (ou *identité de la médiane*) :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Proposition 2 - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \ |\langle x,y\rangle| \leqslant ||x||\cdot||y||$$

Et il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration 3

Exercice 7

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.)

Proposition 3 - Inégalité triangulaire

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \ |\|x\|-\|y\|| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

De plus $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 4

Faire le ménage dans les exercices en distinguant espace préhilbertien et espace euclidien.

Exercice 8

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 9

Soient $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1,\ldots,v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 10

Montrer que

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (f,g) \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 11

Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

Exercice 12

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π-périodique$\}$. Montrer que $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 13

Soient $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n$ des réels positifs. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

Exercice 14

Soit E un espace euclidien de dimension n et $x_1,\dots,x_p$ des vecteurs de E tels que si $i \neq j$ alors $\langle x_i|x_j\rangle < 0$. Montrer par récurrence sur n que $p \leqslant n+1$.

Exercice 15

Soit E un espace euclidien, et $(e_1,\ldots,e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant :

$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle^2$.

Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

Exercice 16

Montrer que sur $M_n(\mathbb{R})$ l'application :
$(A,B) \to tr({}^tAB)$
est un produit scalaire. Soit N la norme associée, montrer que :
$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
Montrer que :
$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A)$.

Exercice 17

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :
$\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 18

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :
$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.
Montrer :
$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y)$.

Exercice 19

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que $I_n + A$ est inversible.

Voir les cours de Bertault pour l'application dans les espaces probabilisé, espérance covariance, etc.

IV Orthogonalité.

Récupérer et adapter le chapitre correspondante dans la leçon des espaces préhilbertiens.

Orthogonalisation de Gram-Schmidt d'une famille libre.

Théorème de la base incomplète orthonormale.

V Le groupe orthogonal.

VI Dimension deux.

VII Dimension trois.