Applications différentiables.

Il s'agit de généraliser la notion d'application dérivable à des fonctions définies sur un espace vectoriel et à valeur dans un espace vectoriel. Afin de pouvoir retrouver les notions de limites, de continuité, etc, il faudra considérer des espaces vectoriels munis de normes.

I Définition.

Définition 1

Soient :
. $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés,
. U un ouvert de E,
. $f : U \to F$,
. $a \in U$.

Nous dirons que f est *différentiable en a* si et seulement s'il existe
(i) $L_a \in \mathscr{L}^c_{\mathbb{K}}(E,F)$,
(ii) un voisinage V de 0_E de sorte que $a+h \in U$,
(iii) $\forall h \in V$, $f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \underset{h\to 0_E}{\mathrm{o}}(\|h\|)$.

Remarques.

1. L'application linéaire L est alors unique.
2. Cette définition de la différentiabilité (différentiabilité au sens de Fréchet) présent l'avantage de ne pas dépendre d'une base particulière contrairement aux définitions utilisant les dérivées partielles en dimensions finies.
3. Si f est différentiable en a l'application linéaire continue L_a est appelée *la différentielle de f en a* et elle est notée $f'(a)$ ou $\mathrm{d}f$ (notation de Leibniz) ou $Df(a)$.
4. On pourrait écrire également :
$$\lim_{h\to 0_E} \frac{\|f(a+h)-f(a)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$
5. On retrouve un développement à l'ordre 1 de la fonction f.
6. L'application affine $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a)+f'(a)(x-a)\end{array}\right.$ est appelée l'application affine tangente à f en a.

7. Il faut considérer un ouvert U autour de a afin d'être sûr de pouvoir trouver des $h \in E$ tels que $a + h \in U$.
8. La notion de différentiabilité dépend des normes choisies sur les espaces vectoriels.
9. Si f est différentiable pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, elle l'est encore pour n'importe quel couples de normes équivalentes. En particulier en dimensions infinies toutes les normes étant équivalentes une fonction différentiable l'est encore pour n'importe qu'elle norme.
10. Il est possible de se limité à un espace vectoriel topologique séparé pour l'espace d'arrivée F.
11. On dit que f est de classe C^1 sur U si f est différentiable en tout point de U et si $f' : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}\right.$ est continue (pour les topologies associées aux normes sur E et F).

II Propriétés.

Proposition 1

Une application différentiable en un point est continue en ce point.

III Recherche d'extrema.

IV Extrema liés (ou sous contrainte), multiplicateurs de Lagrange.

Remarques.

1. Les points correspondants à des extrema de f restreinte à $g^{-1}(\{0\})$ ne sont pas nécessairement des points critiques (?). Cette démarche se substitue donc à celle de la recherche des points critiques pour une fonction sans contrainte.
2. Une astuce courante est d'utiliser, lorsque c'est possible la compacité de $g^{-1}(\{0\})$ qui garanti lorsqu'il n'y a que deux points susceptibles d'être des extrema que l'un d'entre eux est un maximum et l'autre un minimum.

Exercice 1

1. Étudiez les extremums de l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3 \end{array}\right.$ sur la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Même question pour $f : (x,y,z) \mapsto x + y^2 + z^3$.

Correction exercice 1

1. (a) f est continue (car polynomiale) sur la sphère S qui est compacte donc, d'après le théorème de Weierstrass, f est bornée sur S et elle y atteint ses bornes.

   (b) Notons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2+z^2 \end{array} \right.$ et vérifions les hypothèses du théorème de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

   - f est C^∞, car polynomiale, sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - g est C^∞, car polynomiale, sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - $g^{-1}[\{0\}] = S \subset \mathbb{R}^3$.
   - Soit $u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$.

     Vérifions que $g'(u)$ est surjective.

$$\begin{aligned} g'(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(u) & \frac{\partial g}{\partial y}(u) & \frac{\partial g}{\partial z}(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

     g' est clairement surjective : si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u\left(\frac{1}{2}\alpha,0,0\right) = \alpha$.

$$\boxed{g' \text{ est surjective.}}$$

   (c) Déterminons les points susceptibles d'être des extrema de f sur S par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

   Du point précédent nous déduisons que nous pouvons utiliser la méthode de Lagrange.
   Soit $u \in S$ un point en lequel f admet un extremum local.
   Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(u) = \lambda g'(u)$$

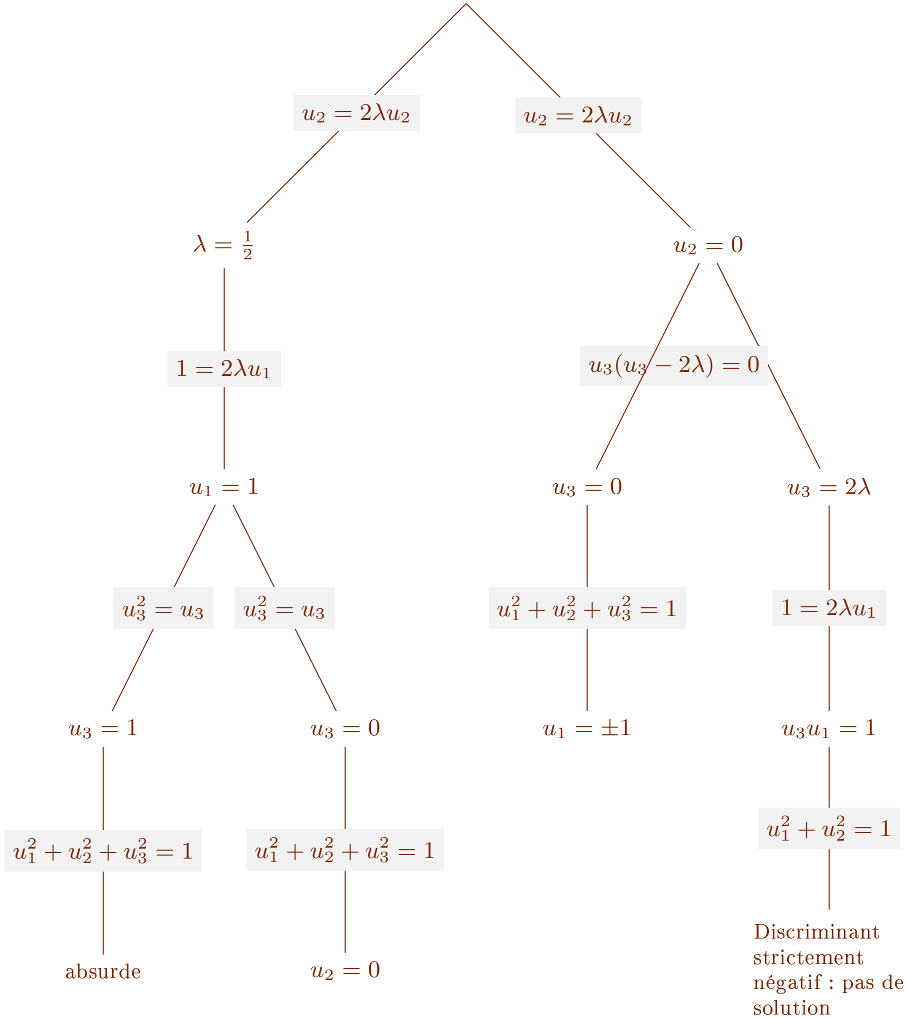
   ce qui équivaut, en confondant les applications linéaires et leur matrices dans les bases canoniques, successivement à

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u) & \frac{\partial f}{\partial y}(u) & \frac{\partial f}{\partial z}(u) \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & u_2 & u_3^2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 & 2u_3 \end{pmatrix} \\ &\left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda u_1 \\ u_2 = 2\lambda u_2 \\ u_3^2 = 2\lambda u_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En ajoutant l'équation cartésienne de S nous obtenons finalement le système :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda u_1 \\ u_2 = 2\lambda u_2 \\ u_3^2 = 2\lambda u_3 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \end{cases}$$

En raisonnant par conditions nécessaires nous obtenons :



Il n'y a que deux points susceptibles de correspondre à des extrema : $(\pm 1, 0, 0)$.

(d) Concluons.

$f(1{,}0{,}0) = 1$ et $f(-1{,}0{,}0) = -1$ et puisque S est compacte nous en déduisons :

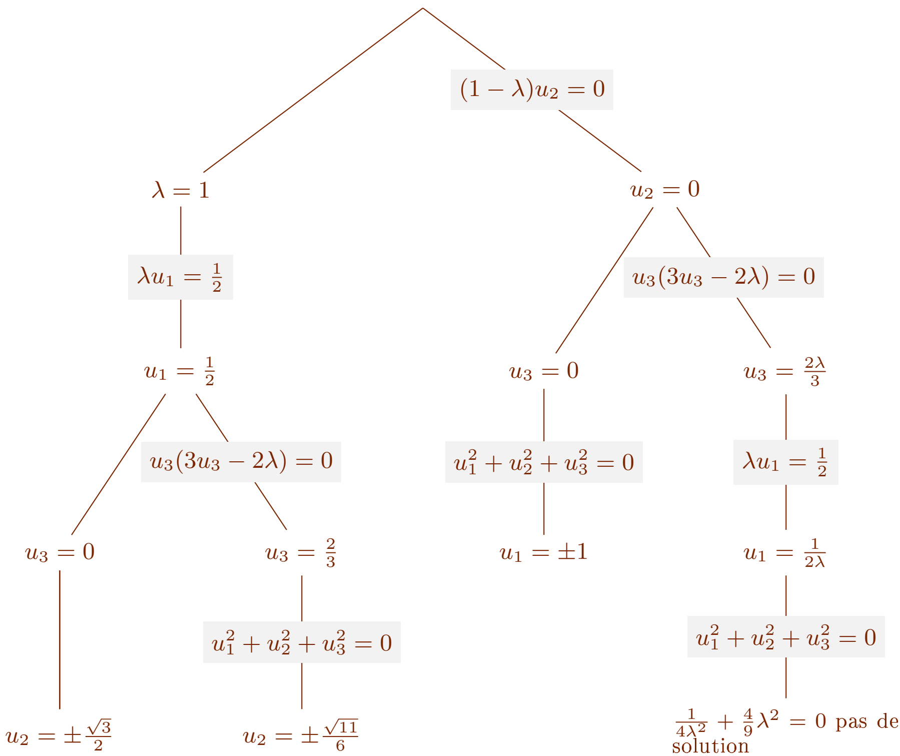
$$\boxed{\text{f admet un maximum égale à 1 atteint en $(1{,}0{,}0)$ et un minimum égale à -1 atteint en $(-1{,}0{,}0)$.}}$$

2. En procédant comme dans la question précédente nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda u_1 \\ 2u_2 = 2\lambda u_2 \\ 3u_3^2 = 2\lambda u_3 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda u_1 = \frac{1}{2} \\ (1-\lambda)u_2 = 0 \\ u_3(3u_3 - 2\lambda) = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \end{cases}$$



u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1
u_2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{11}}{6}$	0	0
u_3	0	$\frac{2}{3}$	0	0
$f(u_1,u_2,u_3)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{119}{108}$	1	-1

f admet un maximum égale à $\frac{5}{4}$ atteint en $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et un minimum égal à -1 atteint en $(-1,0,0)$.