Courbe paramétrée.

I Généralités.

Définition.

Définition 1

Soient
. I un intervalle de $\mathbb{R}$,
. $k \in \mathbb{N}$,
. $d \in \{2,3\}$,
. $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$.

Si γ est une application de classe C^k nous dirons que γ est une *courbe paramétrée* de classe C^k.
$\Gamma = \gamma(I)$ est appelé *le support de γ*.

Remarques.

1. Puisque I est intervalle (partie connexe de $\mathbb{R}$) Γ est connexe par continuité de γ.
2. Si I est un segment (donc un compact) alors Γ est compact.
3. Les courbes C^0 peuvent être très éloignées de l'idée usuelle de courbe (courbe de Peano).

Courbes paramétrées équivalentes.

Définition 2

Soient :
. I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$,
. $k \in \mathbb{N}$,
. $d \in \{2,3\}$,
. $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^d$ et $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^d$ deux courbes paramétrées de classe C^k.

Nous dirons que γ_1 est un *C^k-reparamétrage* de γ_0 si et seulement si il existe un C^k-difféomorphisme $\theta : J \to I$ tel que : $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \theta$.

Remarques.

1. Si γ_1 est un reparamétrage de γ_0 alors elles ont le même support : $\gamma_1(J) = \gamma_0(I)$.
2. Si deux courbes ont le même support elles ne sont pas nécessairement des reparamétrages l'une de l'autre.

Proposition 1

Pour $k \in \mathbb{N}$, la relation être « un C^k-reparamétrage » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées de classe C^k à support dans $\mathbb{R}^d$.

Remarques.

1. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée *une courbe géométrique de classe C^k*.
2. Toutes les courbes paramétrées d'une même courbe géométrique ont le même support. Mais la réciproque est fausse.
3.

Définition 3

Soient

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. $d \in \{2,3\}$,

. $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (ou l'abscisse curviligne) de classe C^2.

La courbure de γ en $s \in I$ est le nombre positif :

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

II Première forme quadratique fondamentale.

Exercices.

Exercice 1

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 - z = 0\}$.

1. Montrer que $f : (u,v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v), uv\right)$ est C^∞.
2. Montrez que f est une paramétrisation complète de S.
3. Montrer que la paramétrisation f est régulière.

Correction exercice 1

1. Ses composantes sont C^∞ en tant que fonctions polynomiales, donc f l'est aussi.
2. Il faut établir que f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur S.
3. Il faut vérifier que la différentielle $f'(u,v)$ est de rang 2, c'est-à-dire que les vecteurs dérivés partiels sont linéairement indépendants.

$$f'_u(u,v) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},v\right)$$
$$f'_v(u,v) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},u\right)$$

   Donc $f'u \wedge f'_v = \left(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(v-u),-\frac{1}{2}\right) \neq 0$.
   Donc f est une paramétrisation régulière.
4.

$$q_{1(u,v)}(x,y) = \left(v^2+\frac{1}{2}\right)x^2 + 2uvxy + \left(u^2+\frac{1}{2}\right)y^2$$

Exercice 2

On note S l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0;+\infty[$ de $\mathbb{R}^2$ par $f : U \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (\mathrm{e}^-v\cos u,\mathrm{e}^{-v}\sin u,v)$.

1. Montrez que f est une paramétrisation de classe C^∞ et régulière de f.
2. Calculez en chaque point de S, la première forme quadratique fondamentale et des équation cartésiennes de la droite normale à S.

Correction exercice 2

1. Comme question 1 de l'exercice précédent.
2.

$$q_1(x,y) = \mathrm{e}^{-2v}x^2 + \left(1+\mathrm{e}^{-2v}\right)y^2$$

   La normale au point $M\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-v}\cos u\\ \mathrm{e}^{-v}\sin u\\ v\end{pmatrix}$ est la droit D passant par M et de vecteur directeur $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2v}}}\begin{pmatrix}\cos u\\ sinu\\ \mathrm{e}^{-v}\end{pmatrix}$.
   Soit $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$P \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

$$P \in D \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{e}^{-v} - \sin uz = \left(\mathrm{e}^{-2v} - v\right) \sin u \\ -\mathrm{e}^{-v} x + \cos uz = \left(v - \mathrm{e}^{-2v}\right) \cos u \\ \sin x \cos y = 0 \end{array} .$$

III Repères Darboux-Ridocourt.

Il s'agit d'un repère orthonormé directe fonction du paramètre de la surface.

Théorème 1

Formules de Darboux. Donnent τ', g' et n' en fonction de τ, g et n.

Démonstration 1

Soit $\psi : s \mapsto f(u(s),v(s))$ une reparamétrisation normale de la (I,ϕ).
ψ est de classe au moins C^2.

1. $\tau(s) = \psi'(s)$ donc τ est de classe C^1.
2. $n(s) = \frac{f'_u \wedge f'_v}{\|f'_u \wedge f'_v\|}$ et tut de classe C^1 donc n est de classe C^1.
3. $g(s) = n(s) \wedge \tau(s)$ donc g est de classe C^1.

$\rangle \tau,\tau \rangle = 1$ donc $\rangle \tau,\tau' \langle = 0$. De même pour n et g.
$\langle \tau,n \rangle = 0$ donc $\langle n',\tau \rangle = \langle \tau',n \rangle$ de même pour les autres.
La matrice est donc

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\langle \tau',g \rangle & -\langle \tau',n \rangle \\ \langle \tau',g \rangle & 0 & -\langle n',g \rangle \\ \langle \tau',n \rangle & -\langle n',g \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

En considérant les colonnes qui sont τ' , g' et s' on retrouve les formules de Darboux.

Théorème 2

Liens formules de Séret-Fresnet et formules de Darboux.

Démonstration 2

Par produit scalaire on obtient les coordonnées des différents vecteurs dans l'autre repère.

Seconde forme quadratique fondamentale.

Théorème 3

Démonstration 3

Pour le minimum et le maximum il faut passer par les vecteurs propres et donc faire une diagonalisation simultanée des deux formes quadratiques.

Exercices.

IV Sous variétés de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

Soient V (resp. W) une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) de dimension d (resp. e) et de classe C^k. Montrez de diverses manières que $V \times W$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Correction exercice 3

1. En utilisant une définition implicite.

   Soient $a = (a_n, a_p) \in V \times W$ et U un voisinage ouvert de a dans $V \times W$.

   Nous souhaitons faire apparaître une submersion pour cela nous allons « rassembler » deux submersions correspondant à V et W. Nous aurons donc besoin de deux ouverts l'un sur $\mathbb{R}^n$ et l'autre sur $\mathbb{R}^p$.

   U est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ donc il existe deux ouverts U_n et U_p respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ tels que : $U_n \times U_p \subset U$. De plus $U_n \times U_p$ est alors un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

   Puisque V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k, il existe C^k-une submersion $s_n : U_n \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $U_n \cap V = s_n^{-1}(\{0\})$.

   Puisque W est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ de dimension e et de classe C^k, il existe C^k-une submersion $s_p : U_p \to \mathbb{R}^{p-e}$ telle que $U_p \cap W = s_p^{-1}(\{0\})$.

   Considérons $s : U_n \times U_p \to \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{p-e}$ telle que, en notant P_i la projection canonique du produit cartésien sur i-ième coordonnée, pour tout $(x,y) \in U_n \times U_p$,

   $$s(x,y) = s\left(P_1[s_n(x)], \ldots, P_{n-d}[s_n(x)], P_1[s_p(y)], \ldots, P_{p-e}[s_p(y)]\right).$$

   Vérifions que s est une C^k-submersion en a.

   (a) s est de classe C^k puisque les P_i, s_n et s_p le sont.

   (b) $s'(a) = (P_1[s'_n(a_n)], \ldots, P_{n-d}[s'_n(a_n)], P_1[s'_p(a_p)], \ldots, P_{p-e}[s'_p(a_p)])$. Puisque $s'_n(a_n)$ et $s'_p(a_p)$ sont surjectives $s'(a)$ l'est aussi.

   Donc s_n est une C^k-submersion en a.

   Comme de plus

   $$(U_n \times U_p) \cap (V \times W) = (U_n \cap V) \times (U_p \cap W)) = s^{-1}(\{0\}),$$

nous avons finalement démontré que

$$\boxed{V \times W \text{ est une sous-variété de dimension } d+e \text{ et de classe } C^k.}$$

Exercice 4

La partie de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y = |x|$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Même question avec l'équation $x^2 - y^2 = 0$.

1. La courbe représentative de $f : x \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété sur $\mathbb{R}$ car cette fonction est continue mais pas dérivable en 0.
   $x \mapsto |x|$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathscr{C}_f$ est hormis en 0 la réunion de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
2.