Barycentre et convexité.

I Barycentre de deux points.

II Fonction vectorielle de Leibniz.

Définition 1

Soient
. $\mathscr{E}$ un espace affine,
. E un espace vectoriel directeur de $\mathscr{E}$,
. $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{E}^n$,
. $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

Nous désignerons par *fonction vectorielle de Leibniz associée au système* $(A_i,a_i)_{1\leq i\leq n}$ la fonction $\vec{f}$ de $\mathscr{E}$ dans son espace vectoriel directeur E définie par

$$\vec{f} : M \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Proposition 1

Soient
. $\mathscr{E}$ un espace affine,
. E un espace vectoriel directeur de $\mathscr{E}$,
. $n \in \mathbb{N}^*$,
. $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{E}^n$,
. $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$,
. $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée.

1. Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors $\vec{f}$ est constante.
2. Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors il existe un point $G \in \mathscr{E}$ tel que :

$$\forall M \in \mathscr{E},\ \vec{f}(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MG}.$$

Démonstration 1

Démontrons un lemme.

Soit $(M,N) \in \mathscr{E}^2$.

$$
\begin{aligned}
\vec{f}(M) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MN} + \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{NA_i} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \overrightarrow{MN} + \vec{f}(N)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\forall (M,n) \in \mathcal{E}^2,\ f(M) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + f(N).}
$$

Nous en déduisons que si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ alors $\vec{f}$ est constante.

Démontrons que $\vec{f}$ est injective.

Soit $(M,N) \in \mathcal{E}^2$ tels que $\vec{f}(M) = \vec{f}(N)$. Démontrons que $M = N$.

$$
f(M) = f(N)
$$

équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) & \\
\overrightarrow{MN} &= \vec{0} \\
\overrightarrow{MN} &= \vec{0} \\
M &= N
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{f} \text{ est injective.}}
$$

Démontrons que $\vec{f}$ est surjective.

Soit $\vec{v} \in E$. Démontrons qu'il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $\vec{v} = \vec{f}(M)$.
Soit $O \in \mathcal{E}$.

Raisonnons par condition nécessaire et suffisante. Supposons $\vec{v} = \vec{f}(M)$. Nous en déduisons successivement

$$\vec{v} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MO} + \vec{f}(O)$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \left[\vec{f}(O) - \vec{f}(M)\right]$$

Il est aisé de vérifier que, réciproquement, si M est le point défini par la précédente égalité alors c'est un antécédent de $\vec{v}$ par $\vec{f}$.

$\vec{f}$ est donc surjective.

III Barycentre.

Définition.

Le barycentre est à l'espace affine ce que la combinaison linéaire et à l'espace vectoriel. Il est donc fondamental.

Définition 2

Soient

. $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace vectoriel directeur E,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathscr{E}^n$,

. $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

Si la somme des termes de $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est non nulle alors il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Le point G est appelé *barycentre des points $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ affectés des coefficients $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$*.

Remarques.

1. L'unicité découle de la proposition concernant la fonction vectorielle de Leibniz.

2. Nous dirons qu'une famille $(A_i,a_i)_{1\leq i\leq n}$ constitue *un système de points pondérés* de l'espace affine $\mathscr{E}$.

3. Pour un système $(A_i,a_i)_{1\leq i\leq n}$ de points pondérés nous noterons $\text{bary}\begin{bmatrix} A_i \\ a_i \end{bmatrix}_{1\leq i\leq n}$ son barycentre s'il existe.

4. Si $a_i = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors nous dirons que G est *l'isobarycentre de la famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$* ou encore son *centre de gravité*.

Propriétés.

Proposition 2 - Commutativité

Soient

. $\mathscr{E}$ un espace affine,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{E}^n$,

. $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$,

. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

G est le barycentre des points $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ affectés des coefficients $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ si et seulement si G est le barycentre des points $(A_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$ affectés des coefficients $(a_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$.

Démonstration 2

Découle de la commutativité dans l'espace vectoriel directeur.

Proposition 3 - Homogénéité

Soient

. $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace directeur E,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{E}^n$,

. $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$,

. $k \in \mathbb{R}^*$.

G est le barycentre des points $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ affectés des coefficients $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ si et seulement si G est le barycentre des points $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ affectés des coefficients $(ka_i)_{1\leq i\leq n}$.

Démonstration 3

Découle de la distributivité de la loi externe sur la loi interne dans l'espace vectoriel directeur.

Remarques.

1. Ce résultat permet de normalisé la famille de coefficients en considérant $\left(a_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1}\right)_{1\leq i\leq n}$. Autrement dit on considère la famille de coefficients dont la somme vaut 1.

Proposition 4 - Associativité

Soient
. $\mathscr{E}$ un espace affine d'espace directeur E,
. $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathscr{E}^n$,
. $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$,
. $m \in [\![1,n]\!]$,
. $(I_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ une partition de $[\![1,n]\!]$ telle que : $\forall k \in [\![1,m]\!],\ \sum_{i\in I_k} a_k \neq 0$,
. pour $k \in [\![1,m]\!]$, G_k le barycentre de $(A_i,a_i)_{i\in I_k}$.

G est le barycentre de $(A_i,a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ si et seulement si G est le barycentre de $\left(G_k, \sum_{i\in I_k} a_i\right)_{1\leq k\leq m}$.

Démonstration 4

Par une récurrence dont la rédaction me semble fort fastidieuse.

Variété affine.

Applications affines.

Proposition 5 - Caractérisation des applications affines.

Soient

. $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines de dimensions finies.

. $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application.

f est affine si et seulement si f conserve le barycentre.

Autrement si pour tout famille $(A_i,a_i)_{1\leq i\leq n}$ de points pondérés de $\mathscr{E}$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

$$f\left(\operatorname{bary}\begin{bmatrix}A_i\\ a_i\end{bmatrix}_{1\leq i\leq n}\right) = \operatorname{bary}\begin{bmatrix}f(A_i)\\ a_i\end{bmatrix}_{1\leq i\leq n}$$

Coordonnées barycentriques.

Définition 3

Affinement libre

Remarques.

1. Nous dirons qu'une famille de points affinement libre et génératrice de $\mathscr{E}$ est une *base affine* (ou *repère barycentrique* ou encore *repère affine*) de $\mathscr{E}$.

Lemme 1

Soient

1. $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n,
2. E un espace vectoriel directeur de $\mathscr{E}$,
3. $(A_1,\ldots,A_{n+1})$ une base affine $\mathscr{E}$.

Pour tout point $M \in \mathscr{E}$ il existe une famille $(a_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que le système de points pondérés $(A_i,a_i)_{1\leq i\leq n+1}$ admette M pour barycentre.

IV Convexité.