Exponentielle.

I Définitions.

Série entière.

Proposition 1 - Lemme

La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est convergente absolument et son rayon est infini.

Démonstration 1

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Utilisons la règle de d'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge absolument et ce quelque soit x réel.
Le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

Définition 1

On appelle *fonction exponentielle* et on note exp, la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Séquentielle.

Proposition 2 - Lemme

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ [\ x > -1\ ] \Rightarrow [\ (1+x)^n \geq 1 + nx\ ].$

Démonstration 2

Par récurrence.

Proposition 3

$$\left(\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+\frac{x}{n})^n \end{array}\right.\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}\right. .$$

Démonstration 3

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour vérifier que cette suite est convergente nous allons vérifier que $u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{u_n(-x)}$ sont adjacentes.

   (a) Montrons que $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left[\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left[\frac{n+1+x}{n+1}\cdot\frac{n}{n+x}\right]^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{(n+1)n+nx}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{(n+1)n+(n+1)x-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

   D'après le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-(n+1)\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) \\
&\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \\
&\geq u_n(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{(u_n(x))_{n>|x|} \text{ est croissante.}}$$

   (b) $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante puisque $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$.

   (c) Montrons : $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$.

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = u_n(x)u_n(-x)$$
$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$
$$= \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

D'une part d'après le lemme

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - n\frac{x^2}{n^2}$$
$$\geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

D'autre part puisque $n > |x|$

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

et donc

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leq 1$$

Ainsi

$$1 - \frac{x^2}{n} \leq \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leq 1$$

et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$

$$\boxed{\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes donc convergent vers une même limite $l(x)$.

Ceci étant vrai quelque soit $x \in \mathbb{R}$ nous pouvons conclure

$$\boxed{\left(\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \end{array}\right.\right)_{n>|x|} \text{ converge simplement.}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons que $(u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers e^x.

Remarques.

1. Pour x réel on peut définir $\exp(x)$ comme la limite de la suite $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$.