Séries entières.

I Rayon de convergence.

Définition 1

Nous appellerons *série entière* toute série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ z & \mapsto & a_n x^n \end{array}\right.$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Nous noterons alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ la série entière.

Exemples.

1. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est a support fini alors la série entière est une fonction polynomiale. Ainsi toutes les fonctions polynomiales sont des séries entières.
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-n+1}{n^3+8} z^n$ sont des séries entières.

Remarques.

1. La notation est celle des séries de nombres mais il s'agit bien de séries de fonctions.
2. La notation $\sum_{n\geqslant p} a_n z^n$ signifie : $\forall k \in [\![0;p-1]\!],\ a_k = 0$.
3. Cette définition se généralise sans difficulté dans $\mathbb{C}$.

Lemme 1 - d'Abel.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{R}$.

S'il existe $(x_0, Z) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|x_0| < |Z|$ et $(a_k Z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ converge absolument.

Démonstration

$(a_k Z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k Z^k| \leqslant M.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |a_n z_0^n| &= |a_n Z^n| \cdot \left|\frac{z_0}{Z}\right|^n \\ &\leqslant M \left|\frac{z_0}{Z}\right|^n \end{aligned}$$

La série géométrique $\sum_{n\geq 0}\left|\frac{x_0}{Z}\right|^n$ est convergente puisque $\left|\frac{x_0}{Z}\right| < 1$, on en déduit par comparaison la convergence de $\sum_{n\geq 0}|a_k x_0^n|$.

■

Définition 2

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Nous appellerons *rayon de convergence* d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ le nombre $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ défini par

$$R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}.$$

Remarques.

1. Cette borne supérieure existe bien puisqu'il s'agit d'une partie non vide (pour $\rho = 0$ la suite est bornée) de $\mathbb{R}$ donc la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ existe si l'ensemble est majoré sinon la borne supérieure est $+\infty$.

Exemples.

1. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $R = 1$. En effet si $\rho \in [0;1[$ alors $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée, et si $\rho > 1$ alors $\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ puisque , pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left(\frac{1}{n!}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée.

Théorème 1

Soient :

. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

. R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$,

. $\mu \in \mathbb{K}$.

(i) Si $|\mu| < R$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n \mu^n$ converge absolument.

(ii) Si $|\mu| > R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n \mu^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

(i) Soit $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $|\mu| < R$ (en admettant qu'il existe).

Démontrons que $\sum_{n\geq 0} a_n \mu^n$ converge absolument.

Puisque $R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$: il existe $r \in]|\mu|; R[$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Autrement dit :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leqslant M.$$

Ceci nous permet d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |a_n\mu^n| &= |a_n r^n| \cdot \left|\frac{\mu}{r}\right|^n \\ &\leqslant M\left(\frac{|\mu|}{r}\right)^n \quad (1) \end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant |\mu| < r$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} M\left(\frac{|\mu|}{r}\right)^n$ est convergente.
Nous en déduisons, d'après l'inégalité (1), par comparaison de la convergence des séries à termes dans $\mathbb{R}_+$, que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n\mu^n|$ converge.

$\sum_{n\geqslant 0} a_n\mu^n$ converge absolument.

(*ii*) Supposons maintenant que $\mu > R$.
Par construction de R cela signifie que $(a_n\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc elle n'est pas convergente, et en particulier elle ne converge pas vers 0.
Autrement dit

$(a_n\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

■

Exemples.

1. La série géométrie $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Remarquons que si $x = 1$ elle diverge (grossièrement).
2.

Remarques.

1. Pour $R = 1$ il n'y a pas de résultat général.

II Série entière définie sur $\mathbb{R}$.