Suites et séries d'applications.

I Convergence simple.

definition 1

Soient X un ensemble non vide et $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Nous dirons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* si et seulement si

$$\forall x \in X,\ \exists l_x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l_x$$

Remarques.

1. Autrement dit si et seulement si

$$\forall x \in X,\ \exists l_x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N_x \in \mathbb{N},\ [\ n > N_x\ ] \Rightarrow [\ |l_x - f_n(x)| < \epsilon\ ]$$

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement nous dirons que $\left\{\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & l_x \end{array}\right.$ est *la limite simple* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Nous pourrons définir une convergence simple sur $Y \subset X$ en considérant les restrictions à Y des fonctions de la suite.
4. Nous appellerons *domaine* ou *ensemble de convergence simple* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le plus grand sous-ensemble de X sur lequel $(f_n)_{n\mathbb{N}}$ converge simplement.
5. La limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. Par exemple $\left\{\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}\right.$ converge simplement vers $\left\{\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$.
6. Dans la pratique nous trouverons la fonction limite grâce à la limite simple puis nous essaierons d'établir une convergence plus forte (uniforme, absolue ou normale).
7. Cette convergence est tellement simple qu'elle se généralise à n'importe qu'elle suite d'applications à valeurs dans un espace topologique.
8. Nous dirons qu'une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement si la suite d'applications formée des sommes partielles converge simplement.

1 Théorème de convergence dominée.

II Convergence uniforme.

1 Définition.

definition 2

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
Nous dirons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f si et seulement si

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ [\ n > N\ ] \Rightarrow [\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\ ]$$

Remarques.

1. Autrement dit si et seulement si

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ [\ n > N\ ] \Rightarrow [\ \forall x \in X,\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\ ]$$

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
3. Nous dirons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge localement uniformément vers* f si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur toute partie compacte de X.
4. Cette définition s'étend au cas des fonctions définies sur un espace métrique.
5. Nous dirons qu'une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément si la suite d'applications formée des sommes partielles converge uniformément.

Proposition 1 - Caractérisation de la convergence uniforme.

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

(i) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ $f_n - f$ est bornée sur X et

$$||f_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii) (*CNS de Cauchy de convergence uniforme.*)
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$

$$\left[\ \left\{ \begin{array}{l} p > N \\ q > N \end{array} \right.\ \right] \Rightarrow [\ |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon\ ]$$

Remarques.

1. Rappelons que si f est bornée sur X alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
2. Un intérêt des suites de Cauchy est que c'est un critère qui ne fait pas intervenir l'expression de la limite.
3. Le critère de Cauchy n'est pas généralisable à tous les espaces métriques mais uniquement à ceux qui sont complets.

2 Convergence uniforme et limite.

Théorème 1 - Convergence uniforme et limite

Soient X une partie non vide d'un espace métrique, $a \in \overline{X}$, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications convergeant uniformément vers une application f : $X \to \mathbb{R}$.
Si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists l_n \in \mathbb{R},\ f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n$$

alors $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, f admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right]$$

Démonstration

1. L'ensemble d'arrivé $\mathbb{R}$ étant un espace complet, montrer que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge équivaut à montrer qu'elle est de Cauchy.

   Montrons que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

   Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (proposition ci-dessus)
   $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,$

   $$\left[\ \left\{\begin{array}{l} p > N \\ q > N \end{array}\right.\ \right] \Rightarrow \left[\ |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon\ \right]$$

   Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p > N$ et $q > N$. De ce qui précède nous déduisons en faisant tendre x vers a :

   $$|l_p - l_q| < \epsilon$$

   Nous avons démontré que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Ainsi nous avons établi que

$$\exists l \in \mathbb{R},\ l_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

2. Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

   Démontrons que

   $$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ [\ |a-x| < \eta\ ] \Rightarrow [\ |l - f(x)| < \epsilon]$$

   Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Puisque $l_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

   $$\exists N_1 \in \mathbb{N}, [n > N_1] \Rightarrow |l - l_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

   (b) Puisque $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n$

   $$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in X,\ [\ |a-x| < \eta\ ] \Rightarrow \left[\ |l_n - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}\right]$$

   (c) Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

   $$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ [n > N_2] \Rightarrow \left[\ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}\ \right]$$

   Soient $N = 1 + \max(N_1, N_2)$ et $x \in X$ tel que $|a - x| < \eta$.

   Inégalité triangulaire

   $$|l - f(x)| \leq |l - l_n| + |l_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

   D'après les trois points précédents

   $$|l - f(x)| < \epsilon$$

   $$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ admet } l \text{ pour limite en } a.}$$

3. L'égalité d'interversion des limites est la traduction des deux points précédents.

■

Remarques.

1. La démonstration se fait en deux temps : la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l car de Cauchy dans un espace complet, et la fonction f admet l pour limite en a.
2. La démonstration utilisant la convergence d'une suite de Cauchy le résultat peut se généraliser à des fonctions à valeurs dans un espace métrique complet.

Corollaire 1 - Convergence uniforme et continuité

Soient X une partie non vide d'un espace métrique et $a \in X$.
Si $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications continues en a convergeant uniformément vers une application $f : X \to \mathbb{R}$, alors f est continue en a.

Remarques.

1. Par contraposition ce résultat permet de montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.
2. Ce résultat s'étend à des continuité sur des ensembles.
3. Ce résultat s'applique également à une suite de fonctions convergeant localement uniformément sur un ensemble.
4. Ce résultat comme la précédente proposition, ne peut se généraliser qu'aux espaces métriques complets.

3 Convergence uniforme et intégration.

Proposition 2 - convergence uniforme et intégration.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \leq b$, et $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$ et $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\int_a^b f$.
Autrement dit on a alors

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$$

Démonstration

1. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, f est continue (vers corollaire) et donc est intégrable sur le segment $[a,b]$.
2. Montrons que $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{R}}$ converge vers $\int_a^b f$.

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^b f_n(x) - f(x)\ \mathrm{d}x \right| && \text{par linéarite de l'intégrale,} \\
&\leq \int_a^b |fn(x) - f(x)|\ \mathrm{d}x && \text{inégalité triangulaire,} \\
&\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty \\
&\leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty
\end{aligned}$$

Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f donc, d'après une caractérisation de la convergence uniforme,

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où par comparaison

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{R}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f}$$

■

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé.
2. Non vérifié : ce résultat doit pouvoir s'étendre en considérant des suites de fonctions convergeant localement uniformément sur des ensembles admettant des recouvrement fini de compacts.

4 Convergence uniforme et dérivation.

Corollaire 2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \leq b$, et $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Si

- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
- et si il existe un $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.
Autrement dit on a alors

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$$

Démonstration

Nous allons construire une fonction f grâce à la précédente proposition (convergence uniforme et intégration) qui soit une limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis, dans un deuxième temps montrer que cette convergence est en fait uniforme et enfin vérifier que $f' = g$.

1. Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$.

   Soit x$\in [a,b]$.
   Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t$$

   Or, d'une part, d'après la proposition traitant de la convergence uniforme et de l'intégration, puisque $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f,

   $$\int_{x_0}^{b} f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g$$

   et d'autre part, par hypothèse,

   $$\exists l \in \mathbb{R},\ f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

   donc

   $$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$$

   Ceci étant vrai quelque soit le x choisi nous concluons

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & l + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

2. Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   Soient $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|f - f_n| &= \left| l + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t - \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t \right) \right| \\
&= \left| l - f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) - f_n'(t)\ \mathrm{d}t \right| && \text{linéarité de l'intégration} \\
&\leq |l - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} g(t) - f_n'(t)\ \mathrm{d}t \right| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq |l - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^{x} \left| g(t) - f_n'(t) \right|\ \mathrm{d}t \\
&\leq |l - f_n(x_0)| + \int_{a}^{b} \left| g(t) - f_n'(t) \right|\ \mathrm{d}t \\
&\leq |l - f_n(x_0)| + (b-a) \left\| g - f_n' \right\|_\infty
\end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour tout $x \in [a,b]$ on en déduit

$$\|f - f_n\|_\infty \leq |l - f_n(x_0)| + (b-a) \left\| g - f_n' \right\|_\infty$$

   Or $|l - f_n(x_0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par construction de l et $\|g - f_n'\|_{infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque, par hypothèse $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g (caractérisation de la convergence uniforme), donc

$$\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Autrement dit :

   $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

3. La fonction f construite dans cette démonstration est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ car g est continue et trivialement $f' = g$.

■

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à un intervalle I non trivial en considérant des convergences localement uniformes.
2. La convergence de $(f_n(x_0))$ s'établit lorsque nous cherchons la limite simple de (f_n).

5 Convergence uniforme de séries.

Nous dirons qu'une série d'applications converge uniformément si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge uniformément.

Proposition 3 - Caractérisation de la convergence uniforme d'une série d'applications.

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X,
- et $\left(\sum_{k\geq n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite des restes de la série) converge uniformément sur X vers 0.

Démonstration

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série.

Notons $S : X \to \mathbb{R}$ la limite au moins simple (éventuellement uniforme) de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme $R_n = S - S_n$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S.

■

6 Critères de convergence uniforme de séries.

7 Distance uniforme.

8 Théorème d'approximation de Weierstrass.

9 Théorème d'Egoroff.

III Convergence absolue d'une série de fonctions.

definition 3

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
Nous dirons que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument* sur X si et seulement si quelque soit $x \in X$, $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Autrement dit $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge absolument sur X si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n|$ converge simplement.
2. Cette definition se généralise à des séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Proposition 4

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge absolument sur X alors $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X.

Démonstration

Supposons que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge absolument et démontrons qu'alors $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement.

Nous allons démontrer que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $x \in X$ et $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque la série converge absolument la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ [\ q \geq p > N\ ] \Rightarrow \left[\ \left|\sum_{k=0}^{q} |f_k(x)| - \sum_{k=0}^{p} |f_k(x)|\right| < \epsilon\ \right]$$

Et donc

$$\sum_{k=p}^{q} |f_k(x)| < \epsilon$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=0}^{q} f_k(x) - \sum_{k=0}^{p} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=p}^{q} |f_k(x)|$$

donc

$$\left|\sum_{k=0}^{q} f_k(x) - \sum_{k=0}^{p} f_k(x)\right| < \epsilon$$

Autrement dit la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy est de Cauchy. Comme de plus $\mathbb{R}$ est complet, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ceci étant vrai quelque soit $x \in X$ nous concluons.

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } X.}$$

■

Remarques.

1. Ce résultat ne se généralise aux séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé que si celui-ci est de plus complet car sinon la suite des sommes partielles peut être de Cauchy sans être nécessairement convergente. Autrement dit pour que la convergence absolue implique la convergence simple d'une séries de fonctions il faut qu'elles soient à valeurs dans un espace de Banach.

IV Convergence normale d'une série de fonctions.

definition 4

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
Nous dirons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement* sur X si et seulement si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur X,
- et $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

1. Il est possible de se contenter d'avoir des fonctions bornées sur X à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.
2. Notons $\mathrm{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des application bornées sur X. $(\mathrm{B}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ muni de la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$ est un espace vectoriel normé. La convergence normale d'une série de fonctions est donc une convergence absolue dans $(\mathrm{B}(X, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$.
3. La convergence normale implique la convergence uniforme.
4. La convergence normale implique la convergence absolue.
5. Des deux remarques précédentes nous déduisons que la convergence normale implique la convergence simple.