Suites réelles.

I Généralités.

Une *suite (de nombres réels)*, u, désigne une liste ordonnée infinie de nombres réels.

Chaque terme de la suite est identifié par sa position, appelée son *rang*, dans la liste ordonnée. Le rang est un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Le terme de rang n de la suite u est noté u_n.

Nous noterons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il est parfois préférable de ne numéroter les suites qu'à partir d'un certain rang et nous pourrons trouver les notations suivantes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n\geq 4}$.

Les résultats donnés dans cette leçon concernent des suites dont le premier rang est 0. La plupart des résultats restent valables pour des suites qui comment à un rang quelconque $n_0 \in \mathbb{N}$.

Remarquons enfin que la lettre n est une variable muette et que l'on peut donc la remplacer par une autre lettre.

Il y a deux moyens classiques de définir (de construire une suite) que nous utiliserons abondamment : les formules explicites et les formules de récurrences.

1 Définition.

Intuitivement une suite réelle est une liste ordonnée infinie (dénombrable) de nombres réels.

Nous les définissons cependant comme des fonctions.

Définition 1

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant p\}$.

Nous appellerons *suite réelle* toute application $u : \mathrm{N} \to \mathbb{R}$.

Remarques.

1. Nous utiliserons la notation fonctionnelle $u(n)$ ou indicielle u_n pour désigner l'image de n par u en préférant cette dernière.
2. n est appelé le *rang* de u_n.
3. u_n est appelé *le terme de rang n*.
4. u_p est appelé *le terme initial* de la suite.
5. La suite u sera notée $(u_n)_{n\geqslant p}$ ou $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, (u_n).

Exemples.

1.

2 Construire une suite explicitement.

Pour les formules explicites nous remplacerons en général u_n par la formule de calcul, $f(n)$, permettant de l'obtenir.

Nous utiliserons souvent la notation fonctionnelle plutôt que la notation indicielle.

Exemples.

1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des entiers pairs sera en fait notée $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui correspond à la fonction inverse.
3. $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pour $r\in\mathbb{R}$, $(nr)_{n\geq 4}$ qui correspond à une fonction linéaire.
5. Pour $q\in\mathbb{R}_+$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui est construite à partir de la fonction cosinus.

Exercice 1.

Retrouvez l'expression algébrique de la fonction f servant à définir de façon explicite la suite de terme général u_n $(n\geq 1)$ dans les cas suivants.

1. $u_n = n$,
2. $u_n = -3n^2+2n-1$,
3. $u_n = \sqrt{n^2+1}$,
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
5. $u_n = \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{2}}$
6. $u_n = \cos(2n)\sin(2n)$

3 Construire une suite par récurrence.

Les suites construites par récurrence se construisent de proche en proche. Il n'y a pas de formule de calcul par laquelle on puisse remplacer u_n.

Un nouveau terme de la suite se trouve à partir du précédent en général par un calcul :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

et il est alors nécessaire de connaître le premier terme de la suite comme dans un raisonnement par récurrence.

Pour les suites définies par récurrence la notation indicielle est plus adaptée.

Exemples.

1. $u_0 = 3$ et quelque soit $n\in\mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = \frac{1}{2}\times u_n$.
2. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n^2-2u_n$. Ici $f(x) = 3x^2-2x+1$.
3. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1-\mathrm{e}^{-2u_n}$. Ici $f(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x}$.

4 Construire une suite avec d'autres suites.

Addition, multiplication terme à terme, multiplication par un scalaire.

II Convergence, divergence, limites.

1 Convergence.

Définition 2

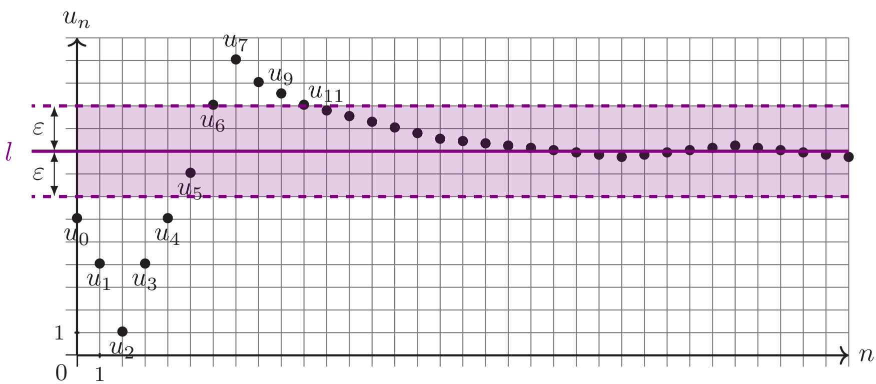
Soient
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,
. l un nombre réel.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)$$

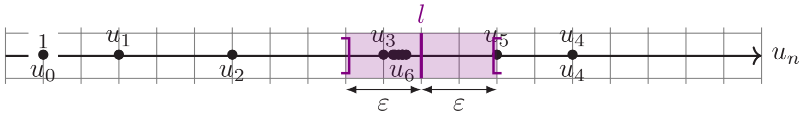
Remarques.

1. Aussi proche que je choisisse de me placer de la valeur l (distance plus petite que ε) il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de la suite qui ne sont pas dans ce voisinage de l.
   On peut illustrer géométriquement cette situation



   À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans le voisinage d'amplitude ε.

   Il est possible de donner une autre illustration géométrique en une dimension. Plaçons tous les termes de la suite sur un axe gradué représentant l'ensemble des nombres réels.



2. Nous utiliserons cette définition pour établir d'autres résultats généraux du cours ou en dernier recours pour étudier la convergence d'une suite.
3. Pour indiquer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l nous noterons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ou

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

4. Nous dirons parfois qu'une suite *converge* sans préciser sa limite.
5. D'une suite qui ne converge pas nous dirons qu'elle *diverge*.
6. Cette définition n'est pas pratique puisque elle ne fournit pas un moyen de trouver une limite : il ne s'agit pas d'une démonstration constructiviste. Il faut donc conjecturer au préalable la limite de cette suite.

Proposition 1 - Unicité de la limite.

Soient
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,
. l_1 et l_2 des nombres réels.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_2, alors $l_1 = l_2$.

Démonstration

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_2.

Démontrons que $l_1 = l_2$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc que $l_1 \neq l_2$ et démontrons que cela conduit à une contradiction. Soit $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2|$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1, à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite sont à une distance inférieure à ε de la limite l_1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \Rightarrow |l_1 - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

De la même façon il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance inférieure à ε de la limite l_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \Rightarrow |l_2 - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

En notant $N = \max(N_1, N_2)$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |l_1 - u_n| \leqslant \varepsilon \\ |l_2 - u_n| \leqslant \varepsilon \end{array} \right. .$$

Soit $n \geqslant N$. Nous avons donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &\leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\ &\leqslant \frac{2}{3}|l_1 - l_2| \\ &< |l_1 - l_2| \end{aligned}$$

Ceci est impossible.
Nous avons donc démontré par l'absurde que, nécessairement $l_1 = l_2$.
Autrement dit

la limite d'une suite convergente est unique.

■

Remarques.

1. Nous pourrons donc maintenant parler de la limite d'une suite.

Voyons maintenant une condition nécessaire de convergence.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit ε.
Par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance inférieure à ε de la limite l :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |l - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

■

Remarques.

1. La contraposé de ce résultat fourni un moyen de démontrer qu'une suite n'est pas convergente.
2.

2 Limite infinie.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ (ou que $u({}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $+\infty$ *pour limite*) si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow (u_n > A).$$

Remarques.

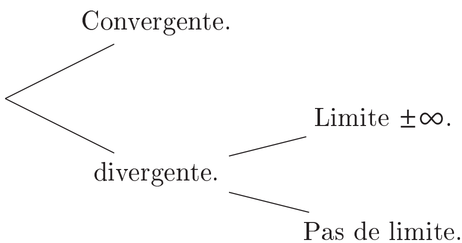
1. Intuitivement cela signifie que la suite prend des valeurs de plus en plus grandes sans jamais être bornée.
2. Nous avons une définition équivalente pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
3. Nous utiliserons les mêmes notations que pour la convergence :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

ou

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

4. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente.



5.

III Comparaison de suites.

1 Suites adjacentes.

Définition 4

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si et seulement si elles vérifient les trois conditions :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles sont toutes deux convergente vers une même limite ℓ.
Si de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors

$$u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \leqslant v_{n+1}.$$

Exemples.

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}$ sont adjacentes. (Elles convergent vers e. Ces suites permettent de démontrer simplement l'irrationalité dee.)
2. Suites des approximations décimales par défaut et par excès d'un réel.

IV Propriétés algébriques sur les limites.

1 Limites et somme.

v_n \ u_n	l	$+\infty$	$-\infty$	P.L.

2 Limites et produit.

V Composition de limites.

Limite de l'image d'une suite par une fonction.

VI Monotonie.

VII Conditions suffisantes de convergences.

VIII Suites de Cauchy.

IX Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Définition 5

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite,
. $a \in \mathbb{R}$.

Nous dirons que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\mathbb{B}}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| < \varepsilon\}$ est infini.

Proposition 4

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite,
. $a \in \mathbb{R}$.

a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\mathbb{B}}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} n \geqslant N \\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

X Limites inférieures et supérieures.

1 Définition.

Proposition 5

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée,
. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n := \sup\{u_k | k \geqslant n\}$,
. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n := \inf\{u_k | k \geqslant n\}$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Démonstration

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée tandis que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc d'après le théorème de limite monotone elles sont convergentes.

■

Définition 6

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée,
. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n := \sup\{u_k | k \geqslant n\}$,
. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n := \inf\{u_k | k \geqslant n\}$.

On appelle *limite inférieure de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le réel :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

On appelle *limite supérieure de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le réel :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarques.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée on peut définir la limite supérieure et la limite inférieure à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Une généralisation à des $\limsup$ et $\liminf$ à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ en considérant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemples.

1. $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
2. $\liminf_{n\to+\infty} (-1)^n = -1$ et $\limsup_{n\to+\infty} (-1)^n = 1$.

3. $\liminf_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = -1$ et $\limsup_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 1$.

2 Caractérisation de la convergence.

Proposition 6

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

De plus , dans ce cas :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Démonstration

Reprenons les notations précédentes : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n := \sup\{u_k | k \geqslant n\}$ et $w_n := \inf\{u_k | k \geqslant n\}$.

* Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et démontrons l'égalité entre limites inférieure et supérieure.
  - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
    Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
    On en déduit que pour tout $n \geqslant N$, $\begin{cases} |v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ |w_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$.
    Ainsi : $\forall n \geqslant N,\ |v_n - w_n| \leqslant |v_n - \ell| + |\ell - w_n| \leqslant \varepsilon$.
    Autrement dit $(v_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge 0.

  Des points précédents nous déduisons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc quelles convergent vers la même limite $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$.
* Réciproquement Supposons que $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ et démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ donc, d'après le théorème d'encadrement (u_n) converge vers cette limite commune.
* Dans la démonstration de l'implication et de sa réciproque nous avons, chemin faisant, établi les égalités de limites : $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

■

3 Liens avec les valeurs d'adhérence.

Proposition 7

Soient :
. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

$\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
De plus, pour tout a valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Démonstration

* Démontrons que $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \limsup_{n\to+\infty} u_n$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1,\ \limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant v_{N_1} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n + \varepsilon.$$

D'autre part, en notant $N_2 = \max(N, N_1)$, par définition de la borne supérieure :

$$\exists n \geqslant N_2,\ \limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_n \leqslant v_{N_2} \leqslant v_{n_1}.$$

Ainsi nous avons établi l'existence de $n \geqslant N$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n + \varepsilon.$$

Autrement dit

$\limsup_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* De façon semblable on établi que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* Dire que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est dire qu'il existe une extractrice $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que$(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \leqslant u_n \leqslant w_n,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{\sigma(n)} \leqslant u_{\sigma(n)} \leqslant v_{\sigma(n)}.$$

Or $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \liminf_{n\to+\infty} u_n$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $u_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ donc, par comparaison :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

■