Séries réelles.

I Règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.

Théorème 1 - Règle de d'Alembert.

Soient :

. $(u_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$,

. $\ell := \liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0, +\infty]$,

. $L := \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0, +\infty]$.

(i) Si $L < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration

*

* Démonstration avec le critère de Cauchy et le lemme de Cesàro.

■

Remarques.

1. Si $\ell \leqslant 1 \leqslant L$ alors on ne peut conclure quant à la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. C'est le cas incertain de la règle de d'Alembert.
2. Cette règle permet d'établir la convergence absolue de séries à dans un espace vectoriel normé.

Corollaire 1

Soient :

. $\lambda \in [0, +\infty]$,

. $(u_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

(i) Si $\lambda < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(ii) Si $\lambda > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ alors $\liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

$\blacksquare$