Intégration de Riemann.

Le calcul intégral est le prolongement des problèmes de quadratures des Grecs. Il s'agit de calculer des aires. Plus précisément, avec les intégrales, nous cherchons à calculer l'aire délimitée par la courbe représentative d'une fonction. Pour cela nous allons recouvrir la surface en question par des rectangles construits au moyen de fonctions continues.

I Intégration d'une fonction constante.

Définition 1. Soient $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b$. On appelle *intégrale de la fonction constante* égale à m le réel $\int_a^b m \, \mathrm{d}t := m(b-a)$.

Remarques.

1. Autrement dit l'intégrale est l'aire algébrique du rectangle délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = m$, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

II Intégration d'une fonction en escalier.

Définition 2. Soient $(n, a, b, a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^n + 3$. Nous dirons que $(a_0, \ldots, a_n)$ est une *subdivision* (ou partage) de $[a, b]$ si et seulement si $a = a_0 < \cdots < a_n = b$.

Définition 3. Soient $(n, a, b, a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^n + 3$ avec $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ i.e. $a = a_0 < \cdots < a_n = b$. On dit qu'une application f définie sur $[a, b]$ est une *application en escalier* s'il existe $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall x \in]a_{i-1}, a_i[, \ f(x) = m_i$.

Remarques.

1. Autrement dit nous nous intéressons à un recollement d'un nombre fini de fonctions constantes et nous souhaiterions déterminer l'aire algébrique ainsi délimitée.
2. Les images des a_i sont quelconques. Notre objectif étant le calcul d'aire en un point n'a pas d'importance.
3. Une difficulté apparaît. Il n'y a pas unicité de la subdivision correspondant à f. Voulant donner une définition de l'intégrale de f, et non pas de l'intégrale de f associée à telle subdivision, nous allons devoir vérifier que notre définition de l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.
4. Généralisation : une application f définie sur E pourra être dite en escalier sur $[a, b]$ si $[a, b] \subset E$ et la restriction $f_{|[a,b]}$ est en escalier sur $[a, b]$.

Définition 4. Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Nous dirons que la subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ est adaptée à f si et seulement si il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall i [\![1, n]\!], \ \forall x \in]a_{i-1}, a_i[, \ f(x) = \lambda_i$.

Remarques.

1. Autrement dit la subdivision est adaptée à f si f est constante sur chacun des $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 1.Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, f une application en escalier sur $[a, b]$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f.

On a $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right) = \sum_{j=1}^m (b_j - b_{j-1}) f\left(\frac{b_{j-1}+b_j}{2}\right)$.

Définition 5. Soit f une application en escalier sur $[a, b]$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ une subdivision adaptée à f. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre réel : $\int_a^b f := \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) f\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)$.

Remarques.

1. Nous trouvons d'autres notations de l'intégrale : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{[a,b]} f$.