Inégalité de Cauchy-Schwartz.

I L'inégalité dans le cas réel.

1 L'inégalité.

Proposition 1

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

. $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Démonstration

* Une démonstration avec des identités remarquables.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \\
&= \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i^2 y_j^2\right) - \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_i x_j y_j\right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i^2 y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i y_i x_j y_j\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i^2 y_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i y_j x_j y_i - \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} x_i y_j x_j y_i \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i^2 y_j^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_j^2 y_i^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i y_j x_j y_i \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_i y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_j x_j y_i\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

* Une démonstration avec un trinôme du second degré.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2 \geqslant 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} t^2 x_i^2 + 2t x_i y_i + y_i^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 + \left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{aligned}$$

donc, puisque la fonction polynomiale de la variable t est positive, son discriminant est positif :

$$\Delta \geqslant 0$$

Autrement dit :

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqslant 0$$

■

Remarques.

1. Ce résultat s'interprète de façon vectorielle : $\left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)^2 \leqslant ||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2$ en considérant les x_i et les y_i comme des coordonnées des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

2 Le cas d'égalité.