Notion de fonction et d'application.

I Injectivité.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. E et F des partie de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application.

f est dit *injective* si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ [f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow [x_1 = x_2].$$

Remarques.

1. Autrement dit, si un élément de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent alors il n'en n'admet qu'un seul.
2.

Exemples.

1. $x \mapsto 2x$ est injective.
2. $x \mapsto 3$ n'est pas injective.

2 Condition suffisante : les fonctions strictement monotones.

Proposition 1Condition suffisante d'injectivité.

Soient :

. E et F des partie de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application.

Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration

Démontrons la contraposée.

Supposons que f n'est pas injective et démontrons qu'alors f ne peut être strictement monotone.

Puisque f n'est pas injective :

$$\exists(x_1,x_2) \in E^2,\ [f(x_1) = f(x_2)] \wedge [x_1 \neq x_2].$$

Supposons, par exemple, $x_1 < x_2$. Comme $f(x_1) = f(x_2)$ f n'est pas strictement monotone.

Nous avons établi que si f n'est pas injective alors f n'est pas strictement monotone.

■

II Bijection.

1 Définition.

2 Construire une application réciproque pour une fonction strictement monotone.

Proposition 2Fonction strictement monotone et réciproque.

Soient :

. E et F deux ensembles de réels,

. $f : E \to F$ une application,

. $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Si f est strictement monotone, alors :

(i) $\tilde{f}$ est bijective.

(ii) $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone.

(iii) $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

Démonstration

■