Limite de fonction réelle.

I Définition.

Pour pouvoir présenter une définition unifiée des différentes limites de fonction nous devrions ajouter un formalisme topologique que nous souhaitons éviter ici dans cette approche élémentaire.

Limite infinie en l'infini.

Il s'agit ici d'exprimer l'idée que, par exemple, *lorsque x devient infiniment grand les images $f(x)$ deviennent également infiniment grandes.*

Peut être mettre en forme l'image du marcheur gravissant une montagne qui connaît sa distance parcourue par rapport au sol (x) et l'altitude à laquelle il se trouve ($f(x)$).

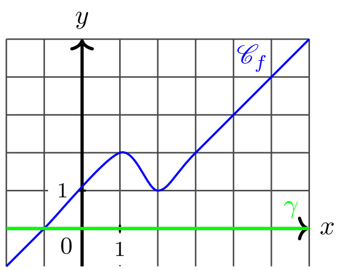
Quelque soit l'altitude qu'il choisisse non seulement il la dépassera mais en plus s'il avance suffisamment à partir d'une certaine distance il ne redescendra plus jamais en dessous.

Faire un schéma avec des montagnes russes.

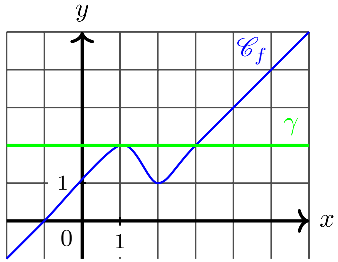
Le type est dans sa marche il ne voit pas le col suivant. Il n'a pas de vue d'ensemble et ne peut donc pas savoir si globalement la montagne monte ou descend. Il faut donc utiliser les données numériques qu'il peut relever.

Pour exprimer cela nous utiliserons l'idée suivante : quelle que soit le palier γ testé pour les images, pour x suffisamment grand tous les $f(x)$ seront plus grand que ce palier. Autrement dit la fonction ne reprendra plus jamais des valeurs plus petites que ce palier.

Ainsi sur le graphique ci-dessous en choisissant le palier $\gamma = 0$ nous voyons que quelque soient $x > -1$ nous avons bien $f(x) > \gamma$. f ne reprendra plus jamais de valeurs inférieures à γ.



Essayons maintenant $\gamma = 2$ nous voyons que quelque soient $x > 3$ nous avons bien $f(x) > \gamma$. Pour aucune valeur de x supérieure à 3, $f(x)$ ne reprendra de valeurs inférieures à 2.



Et en recommençant nous observons que, quelque soit le palier que nous choisirions, pour x suffisamment grand, $f(x)$ ne repasse plus jamais en dessous de ce palier. Nous dirons dans ce cas que f tend vers $+\infty$.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ un ensemble non majoré,

. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$.

Nous dirons que *f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$* si et seulement si : quelque soit le réel γ choisi, on peut trouver un réel η tel que pour tout x de $\mathscr{D}_f$ supérieur à η, $f(x) > \gamma$.
Si f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ nous noterons :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exemples.

1. Justifions que la fonction carré admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

   Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

   Ajouter des illustrations étapes par étape pour voir les ajouts.

   Notons $\eta = \sqrt{\gamma}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \eta$.
   Alors : $x^2 > \eta^2 = \gamma$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Par conséquent la fonction carré tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2.

Remarques.

1. L'idée est que γ peut être choisi aussi grand qu'on le souhaite. Il serait possible de se limiter à des valeurs positives de γ.
2. En utilisant les quantificateurs, nous dirons que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si :
$$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ \left(x > \eta \Rightarrow f(x) > \gamma\right).$$
3. Nous définirons de même *f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$* si et seulement si :
$$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ \left(x > \eta \Rightarrow f(x) < \gamma\right).$$
4. Nous définirons de même *f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$* si et seulement si :
$$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ \left(x < \eta \Rightarrow f(x) > \gamma\right).$$
5. Nous définirons de même *f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$* si et seulement si :
$$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \exists \eta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ \left(x < \eta \Rightarrow f(x) < \gamma\right).$$
6. Pour pouvoir généraliser la définition il vaut mieux raisonner en termes d'intervalles : quelque soit $\gamma \in \mathbb{R}$, il est possible de trouver $\eta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > \eta$, on a $f(x) \in]\gamma; +\infty[$.
7.

   Peut être essayer un raisonnement sur le seul axe des ordonnées pour étudier la limite infinie plutôt que dans le repère en deux dimensions.

8. Il est possible de simplifier la notation lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté : $\lim_{+\infty} = +\infty$.

Proposition 1 - limites classiques.