I Principe de la comparaison asymptotique.

Fonctions de référence.

Trois outils de comparaison asymptotique.

II Fonction négligeable.

Définition.

Définition 1

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
Nous dirons que *f est négligeable devant g au voisinage de a*, et nous noterons $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$, s'il existe un voisinage V de a et une application $\epsilon : V \to \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0 \\ \forall x \in X \cap V \setminus \{a\},\ f(x) = \epsilon(x) g(x) \end{cases}$$

Remarques.

1. Nous pourrons dire que g est prépondérante devant f. Nous dirons qu'il s'agit de la notion de *prépondérance*.
2. Il s'agit d'une propriété locale. Il est en général impossible de trouver une fonction ϵ sur tout l'ensemble de définition X de f et g.
3. Le fait que f soit négligeable devant g exprime le fait que g « l'emporte » localement sur f. L'écart entre f et g au voisinage de a ne cesse d'augmenter (en proportion) et n'est pas borné. g varie beaucoup plus vite que f.
4. Ou encore : f est négligeable devant g asymptotiquement.
5. L'utilisation de la notation « $=$ » adaptée aux manipulations calculatoires que nous effectuerons est en fait trompeuse puisqu'elle n'est pas symétrique. Le fait d'être négligeable s'interprète davantage comme une relation d'ordre. D'où l'ancienne notation : $f \prec g$.

Exercice 1

Montrez que la fonction nulle est négligeable devant toutes les fonctions en tout point.

Correction exercice 1

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $g : X \to \mathbb{R}$ une application.
Montrons que la fonction nulle est négligeable devant g.

En posant $\epsilon(x) = 0$ nous avons bien

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0 \\ \forall x \in X \cap V \setminus \{a\},\ 0 = \epsilon(x)g(x) \end{cases}$$

Et donc

$$0 = \underset{a}{\mathrm{o}}(g).$$

Proposition 1 - Caractérisations de la prépondérance.

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

(i) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V \cap X,\ \ |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap X,\ \ |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|$

(iii) Si $a = +\infty$, alors $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [A, +\infty[\cap X,\ \ |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|$

(iv) Si $a = -\infty$, alors $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, A][\cap X,\ \ |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|$

Remarques.

1. $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a. Il est possible de considérer des intersections de l'ensemble de définition des fonctions f et g et d'intervalles de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, $[A, +\infty[$ ou $]-\infty, A]$.

Un critère pour négligeable.

Proposition 2 - Critère de prépondérance.

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
S'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que g ne s'annule pas sur V alors :

$$f = \underset{a}{\circ}(g) \Leftrightarrow \lim_{a} \frac{f}{g} = 0$$

Démonstration 1

Supposons qu'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que g ne s'annule pas sur V.

Démonstration par implication directe puis réciproque.

1. $\Rightarrow$ Supposons que f est négligeable devant g au voisinage de a et montrons que $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$.

   Puisque f est négligeable devant g au voisinage de a il existe un voisinage V_1 de a tel que
   $$\forall x \in V_1,\ f(x) = \epsilon(x)g(x)$$
   avec $\epsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
   Donc
   $$\forall x \in V \cap V_1,\ \frac{f(x)}{g(x)} = \epsilon(x)$$
   et comme $\epsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
   $$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0}$$

2. $\Leftarrow$ Réciproquement supposons que $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$ et montrons que f est négligeable devant g au voisinage de a.

   Posons
   $$\forall x \in V,\ \epsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
   Clairement
   $$\forall x \in V \cap X \setminus \{a\},\ f(x) = \epsilon(x)g(x)$$
   Puisque $\lim\limits_a \epsilon = \lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$.
   Ainsi
   $$\boxed{f \text{ est négligeable devant } g \text{ au voisinage de } a.}$$

Remarques.

1. Exemple de fonction pour laquelle le résultat précédent ne s'applique pas : $g(x) = h(x) \cdot \sin \frac{1}{x-a}$. En effet g admet alors une infinité de zéros dans tout voisinage de a.

Exercice 2

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ une application.

Montrez que : $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(1) \Leftrightarrow \lim\limits_a f = 0$.

Correction exercice 2

1. Supposons que $\lim\limits_a f = 0$ et montrons qu'alors $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(1)$.

   Posons : $\forall x \in X,\ \epsilon(x) = f(x)$.
   Nous avons bien $\lim\limits_a \epsilon = 0$ par hypothèse, et

   $$\forall x \in X,\ f(x) = \epsilon \times 1$$

   Donc

   $$\boxed{f = \underset{a}{\mathrm{o}}(1).}$$

2. Supposons que $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(1)$ et montrons qu'alors $\lim\limits_a f = 0$.

   D'après la précédente proposition, puisque la fonction constante égale à 1 ne s'annule pas au voisinage de a :

   $$\boxed{\lim_a f = 0}$$

Exercice 3

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ une application.
Montrez que : si $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(f)$ alors f s'annule sur un voisinage de a.

Correction exercice 3

Exercice 4

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
Montrez que si f est bornée au voisinage de a et g tend vers $+\infty$ alors $f = \mathrm{o}(g)$.

Exercice 5

Pour quelles valeurs de m et n $x^m = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(x^n)$.

En 0 ?

Exercice 6

Montrez que $x^\alpha = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right)$, $(\ln x)^\alpha = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^\beta\right)$

Échelle de comparaison.

Une échelle de comparaison E_a est une famille de fonctions définies au voisinage de a (sauf peut-être en a), non-équivalentes à 0 en a, telle que :
$\forall (f,g) \in {E_a}^2, f \neq g \ \Rightarrow (f = \underset{a}{o}(g) \text{ ou } g =_a o(f))$

Transitivité.

Compatibilité avec la multiplication.

III Domination.

Définition 2

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
Nous dirons que *f est dominée par g au voisinage de a*, et nous noterons $f = \underset{a}{\mathrm{O}} g$, s'il existe un voisinage V de a et un nombre $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in X \cap V \setminus \{a\},\ |f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

Remarques.

1. Intuitivement, cela signifie que f ne croît pas plus vite que g.
2. La fonction $|f|$ est bornée par la fonction $|g|$ asymptotiquement, à un facteur près.

IV Équivalence.

Définition.

Définition 3

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.
Nous dirons que *f et g sont équivalentes au voisinage de a*, et nous noterons $f \underset{a}{\sim} g$, s'il existe un voisinage V de a et une application $\epsilon : V \to \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0 \\ \forall x \in X \cap V \setminus \{a\},\ f(x) = [1 + \epsilon(x)]g(x) \end{cases}$$

Remarques.

1. Cela signifie que les fonctions ont un comportement asymptotique identique.
2. L'équivalence au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de fonctions est une relation d'équivalence (relation bilinéaire symétrique, réflexive et transitive) dans l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a.

Proposition 3 - Caractérisations de l'équivalence.

Soient X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ des applications.

(i) S'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que g ne s'annule pas sur V alors

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{a} \frac{f}{g} = 1$$

(ii) $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$

Équivalence et opérations.

Proposition 4

Si f est une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de a :

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Démonstration 2

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = 1$$

Exercice 7

Démontrez les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$

$\sin x - 1 \sim x$

$\tan x - 1 \sim x$

$\mathrm{sh}\ x \sim x$

$\mathrm{th}\ x \sim x$

$\ln(1 + x) \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\arctan x \sim x$

$\mathrm{argsh}\ x \sim x$

$\mathrm{argth}\ x \sim x$

V Développement asymptotique.

VI Développement limité.

Introduction pour ceux qui commencent par cette partie.

Les élèves de lycée apprennent qu'historiquement la dérivation est associée au problème de la tangente : existe-t-il une tangente à la courbe en un point particulier. L'idée étant que cette tangente, localement est semblable à la courbe. Lorsque la fonction est dérivable en a nous obtenons que, dans un voisinage de a, il y a un tangente dont l'équation réduite est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Autrement dit, au voisinage de a

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a).$$

Nous avons ainsi une approximation affine de f au voisinage de a. L'idée du développement limité est d'obtenir un résultat plus précis en ne se limitant pas à des fonctions affines mais en considérant des fonctions polynomiales pour approcher localement la fonction f.

Généralités sur les développements limités.

Addition de développements limités.

Formule polynomiale de Taylor.

Proposition 5

Soient
. $n \in \mathbb{N}$,
. $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Démonstration 3

Démontrons l'égalité équivalente : $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$.
Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe $a_0, \dots a_n$ des réels tels que $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$, $P^{(k)}(0+a) = P^{(k)}(a) = k! a_k$.

Remarques.

1. Il suffit de la dérivation des polynômes au sens algébrique.
2. Cette formule montre qu'il est possible de faire un lien entre la fonction P et un polynôme s'exprimant avec les dérivées successives de P.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Développements limités usuels au voisinage de 0.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{(n-1)!}x^n + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

VII Développement asymptotiques dans d'autres échelles.