Dérivation d'une fonction réelle d'une variable réelle.

I Nombre et fonction dérivée.

Définition 1

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
f est dite *dérivable* en a si et seulement si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite lorsque x tend vers a.
Si c'est le cas

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

est appelé *le nombre dérivé de f en a*.

Remarques.

1. $\tau_f(a,x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le *taux d'accroissement (ou taux de variation) de f entre a et x*.
2. Présentation alternative : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$.
3. Géométriquement $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
4. La dérivabilité est une notion locale.
5. Si pour tout $a \in \mathring{I}$, f admet un nombre dérivé en a alors nous définissons la *fonction dérivée de f* par

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathring{I} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

6. Il existe une notion algébrique de dérivée (opérateur de dérivation) qui ne fait pas intervenir la topologie et s'applique aux polynômes ou aux séries formelles.
7. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a,a+\epsilon[\subset I$ alors nous dirons que f est dérivable à droite en a si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \in [a,a+\epsilon[}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. Dans ce cas cette limite, notée $f'_d(a)$ est appelé le nombre dérivé à droite de f en a.
$f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ sont alors les coefficients directeurs de demi tangentes à la courbe.

f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(a) = f'_g(a)$ et dans ce cas $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.
Les dérivées à droite et à gauche permettent de montrer qu'une fonction n'est pas dérivable en a par contraposée (si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$).

II Dérivation et continuité.

Proposition 1

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration 1

$$\lim_{x \to a} x - a = 0 \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

donc nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$. Autrement dit f est continue en a.

Démonstration 2

La fonction $\tau_f(a,x)$ est prolongeable par continuité en a puisque f est dérivable en a. Donc

$$\forall x \in \mathring{I},\ f(x) = f(a) + \tau_f(a,x)(x - a)$$

Ainsi f est continue en a.

III Théorème de Fermat.

Théorème 1 - Théorème de Fermat

Soient

. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

. $c \in]a,b[$,

. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable en c.

Si f possède un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

Remarques.

1. La notion d'extremum local en c suppose de pouvoir trouver un voisinage ouvert $]a',b'[\subset I$ sur lequel f admet un extremum absolu en c.

2. Pour obtenir une équivalence il faut ajouter des conditions, comme : f' s'annule en changeant de signe.

Démonstration 3

Quitte à considérer un voisinage de c nous pouvons supposer que $f(c)$ est un extremum global, ce que nous supposerons pour cette démonstration.

Supposons, par exemple, que $f(c)$ est un maximum :

$$\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq f(c)$$

Soit $x \in]a,c[$.

$$\begin{cases} f(x) - f(c) \leq 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \Rightarrow \tau_f(c,x) \geq 0$$

Puisque f est dérivable en c, $f'_g(c)$ existe et

$$f'_g(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in [c,c+\epsilon[}} \tau_f(c,x) \geq 0$$

De même nous établirions que $f'_d(c) \leq 0$. Or f étant dérivable en c, $f'_g(c) = f'_d(c) = f'(c)$, donc, nécessairement $f'(c) = 0$.

IV Théorème de Rolle.

Théorème 2 - Théorème de Rolle

Soient

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,

. f continue sur $[a,b]$,

. f dérivable sur $]a,b[$.

$$f(a) = f(b) \ \Rightarrow \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$$

Remarques.

1. La démonstration repose sur l'idée que dans ce cas la fonction possède nécessairement un extremum local et de conclure grâce au théorème de Fermat.

Démonstration 4

f est continue sur le compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ donc $f([a,b])$ est un compact de $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} m \leq M \\ f([a,b]) = [m,M] \end{cases}$$

— Si $m = M$ alors f est la fonction constante, donc sa dérivée est nulle.

— Supposons que $m < M$. Alors $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$. Supposons par exemple $f(a) \neq m$. Puisque m est le minimum de f et qu'il diffère de $f(a)$ (et de $f(b)$)

$$\exists c \in]a,b[, \ f(c) = m$$

Si f admet un minimum en c alors sa dérivée s'annule en c, d'après le théorème de Fermat.

V Théorème des accroissements finis.

Forme usuelle.

Théorème 3 - Théorème des accroissements finis

Soient

. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,

. f continue sur $[a,b]$,

. f dérivable sur $]a,b[$.

$$\exists c \in]a,b[, \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Remarques.

1. L'expression « accroissement fini » provient d'une époque où en calcul différentiel on faisait une distinction entre les accroissements infinitésimaux dx et les accroissements « finis » $x_1 - x_0$.

Démonstration 5

Soit $\varphi : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x \end{cases}$.

φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ce qui permet de conclure.

Remarques.

1. Applications : prolongement de la dérivée, caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables.

Forme généralisée.

Théorème 4 - Théorème des accroissements finis généralisés

Soient
. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
. $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications,
. f et g continues sur $[a,b]$,
. f et g dérivables sur $]a,b[$,
. $\forall x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

$$\exists c \in]a,b[,\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Inégalité des accroissements finis.

Théorème 5 - Inégalité des accroissements finis

Soient
. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,
. f continue sur $[a,b]$,
. f dérivable sur $]a,b[$,
. $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$.

$$|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|.$$

Remarques.

1. Si le théorème des accroissements finis ne se généralise pas à des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé c'est en revanche le cas pour l'inégalité des accroissements finis.

Théorème de la moyenne.

Théorème de Darboux.

VI Prolongement et dérivation.

Théorème limite de la dérivée.

Théorème 6 - Théorème des accroissements finis

Soient
. I un intervalle de $\mathbb{R}$,
. $x_0 \in \mathring{I}$,
. $f : I \to \mathbb{R}$ une application,
. f est continue en x_0,
. f est dérivable en $I \setminus \{x_0\}$,
. f' admet une limite finie l en x_0.

f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$, et donc f' est continue en x_0.

Démonstration 6

Remarques.

1. Ainsi nous obtenons un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Il est possible de donner un résultat analogue pour une dérivabilité à droite ou à gauche.
3. Il est possible de donner un résultat analogue pour une limite qui ne soit pas finie.
4. L'hypothèse de continuité de f est indispensable comme le montre l'exemple $x \mapsto \delta_1(x)$.

Règles de L'Hôpital.

Théorème 7 - Règle de L'Hospital

Soient
. I un intervalle de $\mathbb{R}$,
. $x_0 \in \mathring{I}$,
. $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications,
. f et g sont continues en x_0,
. f et g sont dérivables sur $\mathring{I} \setminus \{x_0\}$,
. $\forall x \in \mathring{I} \setminus \{x_0\}$,
. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to x_0}{\to} l \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \underset{x \to x_0}{\to} l.$$

Démonstration 7

En utilisant le théorème des accroissements finis généralisés.

VII Dérivation et monotonie.

Monotonie.

Théorème 8 - Dérivation et monotonie

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

Pour que f soit croissante sur I il faut et il suffit que

$$\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0.$$

Démonstration 8

Démontrons le résultat par conditions nécessaire et suffisante.

1. Supposons f croissante sur I et démontrons qu'alors : $\forall x \in \mathring{I},\ f' \geq 0$.

   Soit $x_0 \in \mathring{I}$.
   f est croissante sur I si et seulement si

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

   Donc, quelque soit $y \in I$ si $x_0 < y$, alors $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$.
   De même si $x_0 < y$ alors $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$.

Autrement dit

$$\forall y \in I,\ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq 0$$

Puisque $x_0 \in \mathring{I}$, f est dérivable en x_0 et en passant à la limite lorsque y tend vers x_0 dans l précédente inégalité nous obtenons

$$\lim_{y \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{y - x_0} \geq 0$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0}$$

2. Réciproquement supposons : $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$. Démontrons qu'alors f est croissante sur I.

   Nous allons démontrer

   $$\forall (x,y) \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

   Soit $(x_1,x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$ et f est dérivable sur $]x_1,x_2[$.
   D'après le théorème des accroissements finis

   $$\exists c \in]x_1,x_2[,\ f(x_2) - f(x_2) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

   Or par hypothèse $f'(c) \geq 0$ donc

   $$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

   Autrement dit : $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Donc f est croissante sur tout ouvert inclus dans $\mathring{I}$.

   Par recollement nous en déduisons, grâce à la continuité de f, le résultat sur I tout entier.

   $$\boxed{f \text{ est donc croissante sur } I.}$$

Remarques.

1. La démonstration serait simplifiée en considérant un intervalle ouvert $]a,b[$ sur lequel f est dérivable plutôt que I.
2. Ainsi le résultat reste même si la fonction n'est pas dérivable sur un ensemble d'intérieur vide de valeurs de I. Ce qui est le cas s'il s'agit d'un nombre fini ou dénombrable de valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas dérivable (ensembles d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle).
3. En appliquant ce théorème à $-f$ nous obtiendrions un résultat analogue sur la décroissance.

Stricte monotonie.

Lemme 1- Dérivée nulle sur un ouvert

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Si

$$\forall x \in\ ]a,b[,\ f'(x) = 0$$

alors f est constante sur $[a,b]$.

Démonstration 9

Supposons que f' est nulle sur $]a,b[$ et démontrons : $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $f(x) = f(y)$.

Soit $(x,y) \in [a,b]^2$.
Supposons par exemple $x < y$.
D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]x,y[,\ f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$$

Or $f'(c) = 0$ par hypothèse, donc

$$f(x) - f(y) = 0$$

Si $f' = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.

Remarques.

1. Ce résultat se généralise par recollement à une fonction f continue sur un intervalle I non trivial et dérivable sur $\mathring{I}$ dont la dérivée s'annule sur $\mathring{I}$.
2. Réciproquement, si f est constante alors sa dérivée est nulle.

Théorème 9

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

f est strictement croissante si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$

(ii) $\left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ est d'intérieur vide.

Démonstration 10

Démontrons le résultat par conditions nécessaire et suffisante.

1. Supposons f strictement croissante et démontrons les points (i) et (ii).

   (i) D'après le théorème liant dérivation et monotonie f étant croissante sur I, f' est positive sur $\mathring{I}$.

   (ii) Démontrons que l'ensemble $J = \left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ est d'intérieur vide en raisonnant par l'absurde.

   Supposons que J n'est pas d'intérieur vide et établissons une contradiction.

   J n'est pas d'intérieur vide signifie qu'il existe un ouvert (non vide) contenu dans J :

   $$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} a < b \\ ]a,b[\subset J \end{array}\right.$$

   Donc

   $$\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$$

   et d'après le lemme précédent f est donc constante sur $]a,b[$.
   Ceci contredit la stricte monotonie de f.

Nous avons démontré par l'absurde que, nécessairement, J est d'intérieur vide.

   Finalement

Nous avons démontré que si f est strictement croissante alors $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ est J et d'intérieur vide.

2. Réciproquement supposons que $\mathring{J} = \emptyset$ et que $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$.

   (a) D'après le précédent théorème nous savons que f est croissante sur I.

   (b) Pour montrer la stricte croissance de f raisonnons par l'absurde.

   Supposons que f n'est pas strictement croissante et vérifions que cela conduit à une contradiction.

   Si f croissante mais pas strictement croissante sur I alors

   $$\exists (a,b) \in I,\ \left\{\begin{array}{l} a < b \\ f(a) = f(b) \end{array}\right.$$

   Et puisque f est croissante cela implique

   $$\forall x \in [a,b],\ f(x) = f(a)$$

Donc $f' = 0$ sur $]a,b[$. Ainsi : $]a,b[\subset J$.
Ceci contredit le fait que J est d'intérieur vide.

Nous avons démontré par l'absurde que f est strictement croissante sur I.

Remarques.

1. En considérant $-f$ nous en déduisons un résultat similaire pour une fonction strictement décroissante.
2. f est croissante si et seulement si f' est positive (ou nulle).
3. Un cas particulier usuel : si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

VIII Difféomorphismes.

IX Dérivations usuelles.

Linéarité de la dérivation.