Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

I Majorant, minorant.

Définition 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *majorant de A dans $\mathbb{R}$* si et seulement si

$$\forall a \in A,\ x \leq a.$$

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall a \in A,\ a \leq x.$$

Remarques.

1. Un sous ensemble de $\mathbb{R}$ n'admet pas toujours de minorant ou de majorant ; par exemple $\mathbb{R}$.
2. Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet un majorant alors il en admet une infinité. De même pour le minorant.

II Maximum, minimum.

Définition 2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *maximum de A* (ou une *valeur maximale de A*) si et seulement si

(i) x est un majorant de A dans $\mathbb{R}$,

(ii) $x \in A$.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *minimum de A* (ou une *valeur minimale de A*) si et seulement si

(i) x est un minorant de A dans $\mathbb{R}$,

(ii) $x \in A$.

Remarques.

1. Lorsqu'ils existent le maximum et le minimum de A sont respectivement notés : $\max(A)$ et $\min(A)$.

2. S'il existe un maximum (respectivement minimum) alors il est unique.

III Bornes supérieure et inférieure.

Définition.

Définition 3

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Si A admet un plus petit majorant nous l'appellerons *borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$*, et nous le noterons $\sup_{\mathbb{R}}(A)$.

Si A admet un plus grand minorant nous l'appellerons *borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$*, et nous le noterons $\inf_{\mathbb{R}}(A)$.

Caractérisation de la borne supérieure.

Proposition 1

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$.

$s = \sup_{\mathbb{R}}(A)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a \leq s.$$

IV Ensemble fermé et borné.

Proposition 2

Une partie non vide, fermée et majorée de $\mathbb{R}$ admet un maximum.

Démonstration 1

Nous allons démontrer que la borne supérieure dans ce cas est le maximum.

Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie fermée et majorée de $\mathbb{R}$.

D'après la borne supérieure, F étant une partie non vide est majorée, elle admet une borne supérieure $s \in \mathbb{R}$. il suffit donc d'établir que s est un maximum de F. Autrement dit il reste à vérifier que $s \in F$.

Démontrons que : $s \in F$.

Nous allons utiliser la caractérisation suivante des éléments d'un fermé : $f \in F$ si et seulement si : $\forall V \in \mathscr{V}(f)$, $V \cap F \neq \emptyset$.

Soit $V \in \mathscr{V}(s)$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que : $B(s,\varepsilon) \subset V$.

Puisque s est la borne supérieure, il existe $f \in F$ tel que : $s - \varepsilon < f \leq s$.

Par construction nous avons donc : $f \in B(s,\varepsilon) \subset V$ et $f \in F$. D'où : $F \cap V \neq \emptyset$.

Ainsi : $s \in F$.

Et finalement :

$$\boxed{F \text{ admet un maximum.}}$$

Remarques.

1. Il existe évidement un résultat semblable pour le minimum.