Valeur propre, vecteur propre.

Il s'agit de trouver les sous-espaces qu'un endomorphisme laisse globalement stable pour étudier l'endomorphisme à l'aide de ces sous-espaces.

Le cas particulier de la dimension finie est traité dans la leçon de diagonalisation et de trigonalisation des matrices.

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Valeur propre.

Définition 1

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé *une valeur propre de u* si et seulement si

$$\exists x \in E \setminus \{0\},\ u(x) = \lambda x$$

S'il existe un tel x (non nul) il appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.

Exemples.

1. 1 est valeur propre de Id_E.
2. 0 est valeur propre de l'endomorphisme nul de E.

Remarques.

1. Si E est de dimension finie il est possible d'interpréter cela avec les matrices. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est valeur propre de A si et seulement si
$$\exists X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X$$
2. Cette définition se généralise à des espaces vectoriels sur un corps commutatif quelconque.
3. Nous noterons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u que nous appellerons *le spectre de u*.
4. Un endomorphisme réel admet un spectre réel et un spectre complexe.
5. Pour désigner les vecteurs propres et les valeurs propres d'un endomorphisme nous parlerons parfois d'éléments propres.

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres d'un endomorphisme u et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs propres deux à deux distinctes de u respectivement associés au valeurs propres.

Démontrez que la famille $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est $\mathbb{K}$-libre.

Correction exercice 1

Notons $\mathscr{P}(p)$: « la famille $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est libre dans E ».

Démontrons $\mathscr{P}(p)$ par récurrence sur p.

* Si $p = 1$ alors la famille est $\{x_1\}$ or x_1 est non nul (puisque vecteur propre) par conséquent la famille est libre.
* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(p)$ est vraie et démontrons qu'alors nécessairement $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

  Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0 \quad (E_1)$.
  Nous en déduisons

$$
\begin{aligned}
u(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} x_{p+1}) &= 0 \\
\alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{p+1} u(x_{p+1}) &= 0 \\
\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} &= 0 \quad (E_2)
\end{aligned}
$$

  En faisant $\lambda_{p+1} E_1 - E_2$ nous obtenons

$$\alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p)x_p = 0$$

  Les λ_i sont distincts deux à deux donc $\lambda_{p+1} - \lambda_i \neq 0$. Et puisque, par hypothèse de récurrence, la famille $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est libre, nécessairement $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.
  D'après (E_1) nous en déduisons de plus que $\alpha_{p+1} + 0$.
  Autrement soit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Nous avons démontré par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une famille libre.

Spectres.

Proposition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

$$Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset Sp_{\mathbb{C}}(u).$$

II Valeurs propres et polynômes annulateurs.

Proposition 2

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
. $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé à λ.

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \left(P(f)\right)(x) = P(\lambda)x.$$

Proposition 3

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
. $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f.

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f) \subseteq P^{-1}(\{0\}).$$

Démonstration 1

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, x un vecteur propre associé à λ (donc $x \neq 0$) et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Démontrons que : $\lambda \in P^{-1}(\{0\})$.

Puisque P est annulateur de f :

$$P(f) = 0$$

En particulier :

$$P(f)(x) = 0$$

Puisque x est vecteur propre associé à la valeur propre λ, d'après la proposition précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = 0$$
$$P(\lambda)x = 0$$

x étant non nul, nécessairement :

$$P(\lambda) = 0$$

Remarques.

1. L'inclusion n'est pas forcément stricte.

Exemples.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f = 0$ et $P = X(X-1)$ alors $\mathrm{SP}_{\mathbb{K}}(f) \neq P^{-1}(\{0\})$

III Sous-espaces propres.

Définition 2

Si λ est une valeur propre de u, nous appellerons *sous-espace propre de u associé à λ* le sous-espace vectoriel de E noté E_λ et défini par

$$E_\lambda = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}.$$

Autrement dit

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E).$$

Proposition 4

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si λ et μ sont des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont en somme directe.

Démonstration 2

Soient λ et μ des valeurs propres distinctes de u.

Pour montrer que les sous-espaces vectoriels E_λ et E_μ sont en somme directe il faut et il suffit que nous montrions que leur intersection est réduite à $\{0\}$.

Montrons : $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$.

$$\left\{\begin{array}{l} x \in E_\lambda \\ x \in E_\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u(x) = \lambda x \\ u(x) = \mu x \end{array}\right.$$

Donc : $\lambda x = \mu x$.
Et enfin : $(\lambda - \mu)x = 0$.
Or, par hypothèse, $\lambda \neq \mu$, donc, nécessairement $x = 0$.
Ainsi : $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.
Finalement

$$\boxed{E_\lambda \text{ et } E_\mu \text{ sont en somme directe.}}$$

Remarques.

1. Autrement dit
$$\forall(\lambda,\mu) \in Sp_{\mathbb{R}}(u),\ \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \oplus E_\mu$$
2. Puisque
$$\left\{\begin{array}{l} E \oplus F \\ F \oplus G \end{array}\right. \Rightarrow E \oplus F \oplus G$$
nous déduisons, par récurrence, de cette proposition que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont des valeurs propres distinctes de u, alors les $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_N}$ sont en somme directe.
3. Le fait que les sous-espaces propres soient en somme directe n'implique pas forcément que leur somme égale E.
4. Ce résultat s'applique à n'importe quel espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif.

Exemples.

1.

IV Cas de la dimension finie.

Dans ce cas l'outil très efficace est le polynôme caractéristique.

Valeurs propres d'une matrice.

Définition 3

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Nous dirons que λ est une *valeur propre de A* si et seulement si :

$$\exists X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X.$$

Proposition 5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, A la matrice représentative de u dans une base de E.

$$Sp_{\mathbb{K}}(u) = Sp_{\mathbb{K}}(A).$$

$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 0 \notin Sp_{\mathbb{R}}(A)$

Utilisation de Python 3.

Il faut utiliser le package numpy. Documentation de numpy : https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/

```
from numpy import*
A=matrix([[1,2],[3,4]])
linalg.eigvals(A)
linalg.eig(A)
```