Polynômes d'endomorphismes.

I Généralités.

Puissances d'un endomorphisme.

Définition 1

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
. $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous définissons f^n l'endomorphisme de E par récurrence :

$$\begin{cases} v^0 = Id_E \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k = f \circ f^{k-1} \end{cases}$$

Remarques.

1. f^n est bien d'un endomorphisme puisque $(\mathscr{L}(E), +\,, \cdot\,, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Polynôme d'endomorphisme.

Définition 2

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
. $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Nous noterons $P(f)$, et nous appellerons *polynôme d'endomorphisme*, l'endomorphisme défini par : $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Remarques.

1. Nous définirions de même un polynôme de matrice $P(M)$ avec $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si de plus A est la matrice représentative de l'endomorphisme f dans une base $\mathscr{B}$ de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors $P(M) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$.

Sous-$\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[f]$.

Proposition 1

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

L'application $\varphi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array} \right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres unitaires.

Remarques.

1. De même, pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_M \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{array} \right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre unitaires.
2. φ_f peut n'être ni injective ni surjective (exemple ci-dessous).

Exemples.

1. φ_f peut n'être ni injective ni surjective. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (et donc $A^2 = I_n$).
   φ_M n'est pas injective puisque $\varphi_M(X^2 - 1) = 0$.
   φ_M n'est pas surjective puisque $\mathrm{Im}(\varphi_M) = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots) = \mathrm{Vect}(I_n, A)$ est de dimension deux alors que $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension quatre.

Corollaire 1

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

L'ensemble $\mathbb{K}[f]$ des polynômes de l'endomorphisme f est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre commutative de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Démonstration 1

En effet $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Im}(\varphi_f)$.

Remarques.

1. $\mathbb{K}[f]$ est la sous-algèbre de $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ engendrée par f.
2. $\mathbb{K}[f]$ est appelé l'algèbre des polynômes de l'endomorphisme f.

Commutation et polynôme d'endomorphisme.

Proposition 2

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $(f,g) \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)^2$.

$$(f \circ g = g \circ f) \Rightarrow \left(\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P(f) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(f)\right).$$

II Idéal annulateur et polynôme minimal.

Polynôme annulateur.

Définition 3

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Nous dirons que $P \in \mathbb{K}[X]$ est *un polynôme annulateur de f* si et seulement si $P(f) = 0$.

Remarques.

1. De même nous définirions le polynôme annulateur d'une matrice carrée.

Exemples.

1. f est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ est annulateur de f.
2. f est une symétrie si et seulement si $X^1 - 1$ est annulateur de f.

Proposition 3

Soient
. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Si E est de dimension finie alors f admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration 2

Remarques.

1. Ce résultat n'est pas valable en dimension infinie (exemple ci-après).

Exemples.

1. Le seul polynôme annulateur de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ est nul.

Idéal annulateur d'un endomorphisme.

Définition 4

Soient

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Nous appellerons *idéal annulateur de f* l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$.

Proposition 4

Soient

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

L'idéal annulateur de f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, s'il n'est pas réduit au polynôme nul, alors il existe un unique polynôme unitaire qui l'engendre. Cet unique polynôme est alors appelé *le polynôme minimal de u*.

Démonstration 3

L'idéal annulateur de f est un idéal car il est le noyau de φ_f. Il est principal car $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Exemples.

1. L'idéal annulateur peut effectivement être réduit à zéro si E est de dimension infinie : avec $E = \mathbb{R}[[X]]$ et $f : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} X^k$.

Polynôme minimal en dimension finie.

Proposition 5

Tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un polynôme minimal.

Restriction d'endomorphisme et polynôme minimal.

III Polynôme annulateur et valeurs propres

Voyez la leçon algebre lineaire reduction d endomorphisme valeur propre

IV Suite des noyaux itérés.