Matrices symétriques réelles.

Du fait de la définition des matrices symétriques et antisymétriques nombre de résultats découlent des propriétés de la transposition.

I Matrices symétriques.

Définition.

Définition 1

$M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et dite *symétrique* si et seulement si $M = {}^tM$.

Remarques.

1. Les coefficients de la matrices sont donc symétriques par rapport à la diagonale.
2. Autrement dit en notant $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$: $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = m_{j,i}$.
3. Les matrices symétriques sont nécessairement carrées.
4. L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
5. Rappelons que si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et si M est la matrice représentative de f dans une base orthonormée, alors f est symétrique si et seulement si M l'est.

Exemples.

1. Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Caractérisation.

En utilisant la définition de l'endomorphisme symétrique nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1 - caractérisation des matrices symétriques réelles

Soient $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (X,Y) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tXMY = {}^tX{}^tMY.$$

Démonstration 1

Considérerons l'endomorphisme $f : \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M.

D'après le cours sur les endomorphismes symétriques : $f \in \mathscr{S}(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Le résultat découle alors de la définition des endomorphismes symétriques avec le produit scalaire canonique.

Structure algébrique.

Proposition 2

$(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}),+)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),+)$.

Démonstration 2

À faire

Remarques.

1. $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ muni du produit des matrices n'est pas un groupe (pour $n \geqslant 2$) puisque par exemple :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarques.

1. Une base canonique naturelle peut être construite à partir de celle de $M_n(\mathbb{R})$. En effet considérons $E_{i,j} + E_{j,i}$ si $i \neq j$ et $E_{i,i}$ sinon. Ou de façon un façon un peu plus calculatoire : les $(E_{i,j} + (1 - \delta_{i,j})E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.

Produit dans $S_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4

$$\forall (A,B) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2,\ AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow AB = BA.$$

Démonstration 3

Soit $(A,B) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2$.

Démontrons par condition nécessaire et suffisante que $AB = BA$.

* Supposons que $AB = BA$ et démontrons qu'alors $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^t(AB) &= {}^t(BA) \\ &= {}^tA{}^tB \end{aligned}$$

Puisque A et B sont symétriques :

$${}^t(AB) = AB$$

* Supposons que $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et montrons qu'alors $AB = BA$.
Puisque $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} AB &= {}^t(AB) \\ &= {}^tB{}^tA \end{aligned}$$

Et puisque $(A,B) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2$:

$$AB = BA$$

Nous avons démontré par condition nécessaire et suffisante que $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow AB = BA$.

Corollaire 1 - puissances de matrices symétriques.

$$\forall S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N},\ S^k \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Remarques.

1. Nous verrons un peu plus loin que si S est inversible alors le résultat se généralise à $k \in \mathbb{Z}$.

Inverse dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5

$$\forall A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration 4

Repose sur une propriété de la transposition.

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$$

Puisque A est symétrique :

$$^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

Autrement dit : $A^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.

Remarques.

1. Nous en déduisons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A^k \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Diagonalisation.

Lemme 1

Les sous-$\mathbb{R}$-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux.

Démonstration 5

Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, λ et μ deux valeurs propres réelles distinctes de S.

Démontrons que $E_\lambda \perp E_\mu$.

Soit $(X,Y) \in E_\lambda \times E_\mu$.
En utilisant la caractérisation des matrices symétriques réelles pour S :

$$^tXY = {}^tXSY$$

Et puisque $Y \in E_\mu$:

$$\begin{aligned} ^tXY &= {}^tX\left(\mu Y\right) \\ &= \mu {}^tXY \quad (1) \end{aligned}$$

De même pour ${}^tS$:

$$\begin{aligned} {}^tXY &= {}^tX{}^tSY \\ &= {}^t(XS)\,Y \end{aligned}$$

Et puisque $X \in E_\lambda$:

$$\begin{aligned} {}^tXY &= {}^t(\lambda X)\,Y \\ &= \lambda{}^tXY \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons : $0 = (\mu - \lambda){}^tXY$.
Et comme par hypothèse $\lambda \neq mu$ nécessairement ${}^tXY = 0$.
Ceci étant vrai quelque soient $X \in E_\lambda$ et Y_μ : $E_\lambda \perp E_\mu$.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux.

Lemme 2

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel, F, de $\mathbb{R}^n$ stable par S, $F^\perp$ est stable par S.

Démonstration 6

Soit F un sous-espace stable par S.

Démontrons que $F^\perp$ est stable par S.

Soit $X \in F^\perp$.
Pour démontrer que $SX \in F^\perp$ il suffit de démontrer que : $\forall Y \in F$, ${}^t(SX)Y = 0$.
Soit donc $Y \in F$.

$$ {}^t(SX)Y = {}^tX{}^tSY $$

Et pusique S est symétrique :

$$\begin{aligned} {}^t(SX)Y &= {}^tXSY \\ &= {}^tX(SY) \end{aligned}$$

$X \in F^\perp$ et F étant stable par S, $SY \in F$, donc :

$$ {}^t(SX)Y = 0 $$

$F^{\perp}$ est donc stable par S.

Théorème 1 - fondamental de diagonalisation des matrices symétriques réelles

$$\forall S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists(\Omega,D) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{D}_n(\mathbb{R}),\ S = \Omega D \Omega^{-1}.$$

Démonstration 7

1. Première démonstration par récurrence sur la dimension.

   Notons $\mathscr{P}(n)$: « $\forall S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists(\Omega,D) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{D}_n(\mathbb{R}),\ S = \Omega D \Omega^{-1}$ ».

   Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   * $\mathscr{P}(1)$ est trivialement vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

     La démonstration se fera en deux temps :

     - d'abord montrer que S admet un vecteur propre.
     - puis en déduisons un découpage en blocs nous permettant d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

     - Démontrons que S admet une valeur propre

       .

       Monier 6 page 136
     - puis en déduisons un découpage en blocs nous permettant d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

2. Démonstration astucieuse avec la bonne application.

   Monier 6 page 137

3. Démonstration utilisant les espaces hermitiens.

Remarques.

1. Ω est orthogonale donc $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$ et la diagonalisation peut s'écrire $S = \Omega D {}^t\Omega$.
2. Ainsi tout matrice symétrique réelle est somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres.

II Matrices symétriques réelles et bilinéarité.

Forme bilinéaire et matrice symétrique.

$\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Matrices symétriques positives.

Définition 2

Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

Nous dirons que la matrice symétrique réelle S est *positive* si et seulement si

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0.$$

Remarques.

1. Nous noterons $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives.

Proposition 6

Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

S est positive si et seulement si la forme bilinéaire qui lui est canoniquement associée est elle-même positive.

Proposition 7

$(\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}), +\,,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration 8

Proposition 8

$$\forall S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tSS \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Démonstration 9

Démontrons que ${}^tSS \in \mathrm{S}_n^+$.

* ${}^tSS$ est symétrique d'après une propriété de la transposition.
  Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$ {}^tX{}^tSSX = {}^t(SX)(SX) $$

Nous reconnaissons le produit scalaire canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (qui est une forme bilinéaire positive donc :

$$ {}^tX{}^tSSX \geqslant 0 $$

Ainsi : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX{}^tSSX \geqslant 0$.
Autrement dit

$$\boxed{{}^tSS \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

Remarques.

1. Je ne sais pas très bien comment interpréter ce résultat du point de vue de la structure des ensembles cela s'approche d'une sorte d'idéal.

Ordre sur $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Spectre des matrices positives.

Théorème 2 - caractérisation de la positivité par le spectre.

Soit $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

$$ S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+. $$

Démonstration 10

* Soit $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

  Démontrons que $\mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

  Soient $\lambda \in \mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(S)$ et $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda\frac{{}^tXX}{{}^tXX}\\ &= \frac{{}^tX(\lambda X)}{{}^tXX}\\ &= \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}\end{aligned}$$

Or ${}^tXX > 0$, car il s'agit du produit scalaire canonique et $X \neq 0$, et ${}^tXSX \geqslant 0$, car S est symétrique positive, donc $\lambda \geqslant 0$.
Ainsi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et

$$\boxed{\mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+.}$$

* Supposons que $\mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

  Démontrons : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

  D'après le théorème fondamental de diagonalisation des matrices symétriques réelles,

Matrices définies positives.

Théorème de réduction simultanée.

III Matrices antisymétriques.

Définition 3

$M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dit *antisymétrique* si et seulement si $M = -{}^tM$.

Remarques.

1. Les coefficients symétriques par rapports à la diagonale principale sont opposés.
2. Autrement dit en notant $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$: $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = -m_{j,i}$.
3. Les matrices antisymétriques sont nécessairement carrées.
4. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Donc la trace d'une matrice antisymétrique est nulle.
5. L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

Structure algébrique.

Proposition 9

$(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}),+)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),+)$.

Démonstration 11

À faire

Remarques.

1. $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ muni du produit des matrices n'est pas un groupe (pour $n \geqslant 2$) puisque par exemple :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Proposition 10

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarques.

1. Une base canonique naturelle peut être construite à partir de celle de $M_n(\mathbb{R})$: $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

Déterminant des matrices antisymétriques.

Nul si n est impaire et Pfaffien sinon.

Matrice antisymétrique associée au vecteur vitesse angulaire.

Diagonalisation.

IV Matrices symétriques et antisymétriques.

Produit.

Proposition 11

Soient A et et B des matrices symétriques ou antisymétriques commutant ($AB = BA$).
AB est symétrique ou antisymétrique suivant une règle des signes.

Démonstration 12

Soient A et B telles que : ${}^tA = \varepsilon A$ et ${}^tB = \varepsilon' B$.

$$\begin{aligned} {}^t(AB) &= {}^tB\,{}^tA \\ &= \varepsilon\varepsilon' BA \\ &= \varepsilon\varepsilon' AB \end{aligned}$$

Remarques.

1. Réciproque ?

Parties symétriques et antisymétriques.

Il est possible de décomposer une matrice en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique comme on peut le faire pour les parties paire et impaire d'une fonction (ou encore les parties positives et négatives). Cette décomposition est

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM),$$

puisque $\frac{1}{2}(M + {}^tM) \in S_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(M - {}^tM) \in A_n(\mathbb{R})$.

$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$.

Proposition 12

Les sous-espaces $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration 13

Pour établir qu'ils sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$ il faut montrer $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ et $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

* Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.

  Ainsi $\begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases} \Rightarrow 2\,{}^tA = 0.$

  Finalement ${}^tA = 0$ et donc $A = 0$.
* Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Nous pouvons utiliser la décomposition de M en parties symétriques et antisymétriques :

  $$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM),$$

  où $\frac{1}{2}(M + {}^tM) \in S_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(M - {}^tM) \in A_n(\mathbb{R})$.

V Matrices antisymétriques et matrices de rotations infinitésimales.