Matrices orthogonales.

Les matrices orthogonales sont forcément à coefficients réels. La généralisation dans le cas complexe est celle des matrices unitaires.

I Généralités.

Définition.

Définition 1

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

M est dite *orthogonale* si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à M est orthogonal.

Remarques.

1. L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Caractérisations.

Proposition 1

Soit $\Omega \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux.

(i) $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Omega {}^t\Omega = I_n$.

(iii) ${}^t\Omega\Omega = I_n$.

(iv) $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$.

(v) Les vecteurs colonnes de Ω constituent une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

(vi) Les vecteurs lignes de Ω constituent une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

(vii) Ω est la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (muni du produit scalaire canonique).

Exercice 1

Soient $M \in \mathrm{m}_n(\mathbb{R})$, $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M.
Montrez : $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} C_j {}^tCj = I_n$.

Propriétés.

Corollaire 1

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ ({}^t\Omega)^{-1} = {}^t(\Omega^{-1}).$$

Corollaire 2

(i) $\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ${}^t\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
(ii) $\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\Omega^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 3

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(\Omega) \in \{-1; 1\}$$

.

II Diagonalisation.

III Groupe orthogonal.

Proposition 2

$(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe (multiplicatif) distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarques.

1. Cette proposition justifie que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé le *groupe orthogonal*.

Proposition 3

Soient

. $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
. $\mathscr{B}'$ une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
. P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

$\mathscr{B}'$ est une base orthonormale si et seulement si P est orthogonale.

https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ge/node6.html

Groupe spécial orthogonal.

Définition 2

Une matrice orthogonale Ω est dite *droite* (respectivement *gauche*) si et seulement si $\det(\Omega) = 1$ (resp. -1).

Remarques.

1. L'ensemble des matrices droites d'ordre n est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4

$(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$ est sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ appelé le *groupe spécial orthogonal d'ordre n*.

IV Produit mixte.