Matrices diagonales.

I Généralités.

Définition 1

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

A est dite *diagonale* si et seulement si ses seules coefficients non nuls sont ceux de la diagonale.

Remarques.

1. Ainsi A est diagonale si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
2. L'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ est l'intersection des ensembles de matrices triangulaires supérieures et inférieures.

Proposition 1

$(\mathrm{D}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre unitaire, associative et commutative de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{D}_n(\mathbb{K}) = n$.

Démonstration 1

la famille $(E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 1

Déterminez le commutant de $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Déterminez le commutant de $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

II Densité de $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.