Matrices.

I $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ensemble des vecteurs colonnes à n coordonnées) et $\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels isomorphes, nous écrirons donc indifféremment l'un ou l'autre.

Équivalence.

Soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$. M et N sont équivalentes si et seulement si

$$\exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}),\ M = PNQ^{-1}$$

L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

II $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: matrices carrées de taille n.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé l'*ensemble des matrices carrées réelles*.

Structures algébriques.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni

1. d'une loi externe

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \Big(\lambda, (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}\Big) & \mapsto & (\lambda a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \end{array} \right.$$

2. d'une loi interne

$$+ : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \Big((a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}\Big) & \mapsto & (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \end{array} \right.$$

3. d'une loi interne

$$\times : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \Big((a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}, (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}\Big) & \mapsto & \Big(\sum_{1 \le k \le n} a_{i,k} b_{k,j}\Big)_{1 \le i,j \le n} \end{array} \right.$$

Avec ces lois on vérifie aisément

Proposition 1

1. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n^2.
3. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire.
4. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot,\times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire.

Remarques.

1. À vérifier : pour tout sous-corps K de $\mathbb{R}$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot,\times)$ est une K-algèbre unitaire.

Transposition.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La transposée de M est la matrice carrée réelle

$$^tM = (a_{j,i}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Polynôme caractéristique.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de M est

$$P_M(X) = \det(M - XI_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\left(a_{1,\sigma(1)} - \delta_{1,\sigma(1)}X\right)\dots\left(a_{n,\sigma(n)} - \delta_{n,\sigma(n)}X\right)$$

Dans la suite nous noterons $P_M(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$, avec $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'expression dévellopée de P_M.

1. $a_n = (-1)^n$. Donc $(-1)^nP_m(X) = \det(XI_n - M)$ est unitaire.
2. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(M)$.
3. $a_0 = \det(M)$.
4. $P_M(X) = P_{^tM}(X)$.
5. $M \sim N \Rightarrow P_M(X) = P_N(X)$.
6. Théorème de Cayley -Hamilton : $P_M(M) = 0$

Relations d'équivalences.

1. L'équivalence est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. La similarité (matrices semblables) est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. La congruence est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices symétriques.

Définition.

Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dite symétrique si et seulement si

1. ${}^tM = M$.
2. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Lois.

Celles induites par celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais pas le produit qui n'est en général pas une loi interne.

Structures algébriques sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),+)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Propriétés.

1. $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. $\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ (MN \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow MN = NM)$.

IV $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices antisymétriques.

Définition.

Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dite antisymétrique si et seulement si

1. ${}^tM = -M$.
2. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Lois.

Celles induites par celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sauf le produit qui n'est en général pas une loi interne.

V $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: groupe linéaire.

Définition.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe général linéaire ou groupe linéaire.
Les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont appelés des matrices inversibles, ou régulières ou non singulière.

Lois.

Produit par un scalaire non nul et produit de matrices.

Structures algébriques sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe (non abélien si $n \geq 2$).

Matrices semblabes.

Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. M et N sont dites semblables si et seulement si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ M = PNP^{-1}$$

Deux matrices semblables sont équivalentes.

Matrices congruentes.

Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. M et N sont dites congruentes si et seulement si :

1. M et N représentent la forme bilinéaire dans deux bases différentes.
2. $\exists P` =\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ M = {}^tPNP$.

VI $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: groupe orthogonal.

Définition.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous dirons que M est orthogonale si et seulement si :

1. ${}^tMM = I_n$.
2. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^tM$.
3. Les vecteurs colonnes qui composent M sont orthogonaux entre eux et de norme 1.
4. M représente une base orthonormale.
5. ${}^tM$ est orthogonale.

Produit par un scalaire non nul et produit de matrices.

Produit par un scalaire non nul et produit de matrices.

Structures algébriques sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\times)$ est un groupe.

Propriétés.

1. $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(M) \in \{-1,1\}$.
2. $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. $(x,M) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow ||Mx|| = ||x||$.

VII $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. M est définie positive si et seulement si

1. $\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX > 0$.
2. La forme quadratique associée à M est définie positive.
3. Toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.
4. La forme bilinéaire symétrique $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & {}^txMy \end{array}\right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
5. M est congruente à la matrice identité :

$$\exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = {}^tNN$$

Une matrice sera dite définie négative si son opposée est définie positive.

VIII Ensemble des matrices diagonales.

IX Centre de l'ensemble des matrices carrées.