Polynôme caractéristique.

Il s'agit d'étudier un polynôme d'endomorphisme particulier dans le cas de la dimension finie. Nous travaillerons donc avec des matrices carrées.

I Définition.

Définition 1

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Nous appellerons *polynôme caractéristique de A*, et nous noterons χ_A, le polynôme (de l'indéterminée X)

$$\det(XI_n - A).$$

Remarques.

1. Avec cette définition χ_A est un polynôme unitaire.
2. On trouve parfois comme définition : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ et dans ce cas le polynôme n'est pas unitaire.
3. En reprenant la définition du déterminant :

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(i),i} - X\delta_{\sigma(i),i}),$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique de $[\![1,n]\!]$, $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Exercice 1.

Soit $(A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. Démontrez que si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.
2. Montrer que si A est inversible alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Indication : vous pourrez utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

II Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Définition 2

Soient

. E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finie,

. $\mathscr{B}_d$ et $\mathscr{B}_a$ des bases de E et F,

. $f_i n \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$.

Nous appelerons polynôme caractéristique de f le polyn

Proposition 1

Si A est la matrice représentative de u alors $\chi_A = \chi_u$.

Remarques.

1. Ce résultat démontre que les résultats que nous établirons pour les matrices seront valables pour les endomorphismes d'espaces de dimension finie.

III Racines du polynôme caractéristique.

Ensemble des racines.

Proposition 2

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

$\chi_A^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Remarques.

1. Autrement dit les valeurs propres d'une matrices sont très exactement les racines de son polynôme caractéristique. Alors que si P est un quelconque polynôme annulateur de A nous n'avons en général que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subseteq P^{-1}(\{0\})$.

Caractérisation des valeurs propres.

Proposition 3

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes deux à deux :

(i) $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$,

(ii) $A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

(iii) $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$,

(iv) $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$,

(v) $\chi_A(\lambda) = 0$.

IV Les coefficients du polynôme caractéristique.

Des coefficients remarquables.

Proposition 4

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $x_1, \ldots, x_n$ les racines dans $\mathbb{C}$ de χ_A répétées autant de foi que l'indique leur ordre de multiplicité.

$$\mathrm{tr}(A) = x_1 + \cdots + x_n$$

et

$$\det(A) = x_1 \ldots x_n.$$

Corollaire 1

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et que l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées autant de fois que l'indique leur orde de multiplicité alors

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

et

$$\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Les autres coefficients.

$$\det(XI_n - A) = X^n - f_1(A)X^{n-1} + f_2(A)X^{n-2} - \cdots + (-1)^n f_n(A)$$

où

V Théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 1 - théorème de Cayley-Hamilton.

Quelque soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\chi_A(A) = 0.$$

Remarques.

1. La démonstration du théorème peut être simplifiée en intégrant le cas particulier au cas général.
2. Il existe de nombreuses autres démonstrations. Notamment en utilisant la densité de l'ensemble des matrices diagonales dans l'ensemble des matrices carrées.

VI Matrice transposée.

Proposition 5

Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \chi_{{}^tA}.$$

VII Matrices semblables.

Proposition 6

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Corollaire 2

Soient $(A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \sim B \Rightarrow Sp_{\mathbb{K}}(A) = Sp_{\mathbb{K}}(B).$$

VIII Polynôme caractéristique de matrices conjuguées.

Proposition 7

Deux matrices conjuguées ont des polynômes caractéristiques conjugués.

IX Multiplicité des valeurs propres et dimension des sous-espaces propres.

Définition 3

On appelle multiplicité d'une valeur propre d'une matrice A sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique de A.

Proposition 8

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in Sp_\neg(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$, $\omega \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ.

$$1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} E_\lambda \leqslant \omega.$$

X Exercices.

Exercice 2.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x - y, -x + 2y)$ pour tous x et y réels.

1. Déterminez χ_f et les valeurs propres de f.
2. Pour chacune des valeurs propres de f, on précisera l'espace propre correspondant (en le décrivant à l'aide d'une base).
3. f est-il diagonalisable ? Si oui, donnez la forme diagonale dans une base adaptée.