Diagonalisation.

La diagonalisation consiste à rechercher une base de l'espace vectoriel formé uniquement de vecteurs propres d'un endomorphisme. L'objectif est d'obtenir une expression matricielle plus simple de la matrice.

Du point de vu des endomorphismes, diagonaliser consiste à exprimer une application linéaire comme une combinaison linéaire d'homothéties suivant des directions libres deux à deux.

Nous nous intéressons ici uniquement à la diagonalisation des matrices carrées. Le problème consiste donc, étant donnée une matrice carrée, à déterminer si elle est semblable à une matrice diagonale.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définition.

Définition 1

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Remarques.

1. Autrement dit il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

Exemples.

1. Exemple de matrice diagonalisable.
2. Exemples de matrices non diagonalisable en mettant en évidence ce qui les en empêche.

Exercice 1 exemple d'application

Calcul des puissances d'une matrice.

Soient $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminez les coefficients de A^k en fonction de k.

Correction exercice 1

Exercice 2 pour s'entraîner.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que A est inversible.
2. Montrez que $A = PDP^{-1}$.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminez les coefficients de A^k en fonction de k.

Exercice 3 exemple d'application

Suite récurrentes linéaires d'ordre deux.

Soient a et b des nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_1 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

On considère pour tout entier naturel n , le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrez qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n entier naturel.
2. Déduisez-en l'égalité $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrez que A est semblable à une matrice diagonale. Calculer A^n.
4. Déduisez-en une formule donnant la valeur de u_n en fonction de a, b et n, pour tout entier naturel n.

Exercice 4 exemple d'application

Résolution de système d'équations linéaires.

Exercice 5 exemple d'application

Diagonalisation en théorie des graphes.

Exercice 6 exemple d'application

Système d'équation différentielle.

Exercice 7 Tester la leçon.

L'exercice vise à déterminer dans quelles conditions la diagonalisation est unique.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un couple unique $(P,D) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ tel que : $A = PDP^{-1}$.
Montrez que : $n = 1$ et que $\mathbb{K}$ est un corps isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 8

Exponentielle de matrice.

Calculez e^A lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1-6 & \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

II Diagonalisation et valeurs propres.

Proposition 1

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \sim \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$

Démonstration 1

Découle du fait que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Remarques.

1. Autrement dit la matrice diagonale semblables à A est formée des valeurs propres de A.

Exercice 9 exemple de diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 9

1. Les valeurs propres de A sont les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

ce qui équivaut successivement à

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ -1 & \lambda - 4 & 5 \\ 0 & -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

En usant de la règle de Sarus :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) + 3 \times (-1) \times (-2) + 0 \times (-2) \times 5 \\ &\quad - (-1) \times (-2)(\lambda+2) - 0 \times (\lambda-4) \times 3 - (-2) \times 5(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) + 6 - 2(\lambda+2) + 10(\lambda-1) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,1,2\}$.

2. Déterminons les vecteurs propres correspondants.

Exercice 10

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

Déterminez le nombre de matrices diagonales semblables à A.

Exercice 11

Déterminer la matrice racine carrée.

Trouvez une matrice B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

III Caractérisations.

Diagonalisation et sous-espaces propres.

Proposition 2

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A,

(ii) la somme des sous-espaces propres de A égale $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

(iii) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A égale n.

Démonstration 2

Nous allons démontrer les équivalences en établissant des implications circulaires.

1. Diagonalisable implique la proposition (i).

   Supposons que A est diagonalisable et démontrons qu'alors il existe une base formée de vecteurs propres.

   Si A est diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ telles que $A = P\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)P^{-1}$.
   Notons $(E_{i,1})_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$(PE_{i,1})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Vérifions qu'il s'agit de vecteurs propres. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} A(PE_{i,1}) &= P\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)P^{-1}PE_{i,1} \\ &= P\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)E_{i,1} \\ &= P(a_iE_{i,1}) \\ &= a_iPE_{i,1} \end{aligned}$$

Donc $PE_{i,1}$ est un vecteur propre pour la valeur propre a_i.

il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres pour, par exemple $(PE_{i,1})_{i\in[\![1,n]\!]}$.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$.

   Supposons qu'il existe une base $(V_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres.
   Notons E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. L'inclusion $\cup_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}}(A)E_\lambda \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ étant évidente il nous suffit d'établir l'inclusion contraire.

   Démontrons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \subset \cup_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}}(A)E_\lambda$.

   Soit $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Par hypothèse il existe $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $V = a_1V_1 + \ldots a_nV_n$.
   Donc V appartient au sous espace propre engendré par les vecteurs propres $V_1,\ldots,V_n$. Autrement dit $V \subset \cup_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}}(A)E_\lambda$.

   $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \subset \cup_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}}E_\lambda$.

3. $(ii) \Rightarrow (iii)$.

   Supposons que : $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda = E$, et donc $\dim\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda\right) = n$.

   Démontrons qu'alors la somme des dimensions de sous-espaces propres égale n.

   Les sous-espaces propres sont en somme directe donc

$$\begin{aligned} \dim\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda\right) &= \dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda\right) \\ &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim(E_\lambda) \end{aligned}$$

Or par hypothèse $\dim\left(\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda\right) = n$, donc

$$\boxed{\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim\left(E_\lambda\right) = n.}$$

4. Si la somme des dimensions des sous-espaces propres égale n, alors A est diagonalisable.

   Supposons que la somme des dimensions des sous-espaces propres égale 1.

   Exhibons une base formée de vecteurs propres.

   Notons pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, $\mathscr{B}_\lambda$ une base du sous-espace propre associé à λ.
   Les sous-espaces propre étant en somme directe $\cup_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)}\mathscr{B}_\lambda$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Puisque de plus, par hypothèse, cette famille a pour cardinal n, nous pouvons affirmer que c'est une base.
   Dans cette base $W \mapsto AW$ est diagonale. Donc :

   $$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

Remarques.

1. En particulier si A admet n valeurs propres (distinctes) alors A est diagonalisable.

Exercice 12

Démontrez que les matrices symétriques sont diagonalisables.

Exercice 13

Algorithmes de diagonalisation ?

Diagonalisation et polynôme annulateur.

Théorème 1 - Diagonalisation et polynôme annulateur scindé simple

> Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> M est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de M qui soit scindé sur $\mathbb{K}$ et (à zéros) simple.

Démonstration 3

Exercice 14

Soit $A\ in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.
Démontrez que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ est diagonalisable.

Correction exercice 14

A est diagonalisable donc il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé simple qui annule A.
On remarque que $P(\varphi)\, M = P(A)M = 0$.
Donc φ est diagonalisable.

IV Polynôme caractéristique.

Proposition 3 - Caractérisation de la diagonalisibilité avec le polynôme caractéristique.

Soient $A \in {}_n(\mathbb{K})$.

A est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont (simultanément) vérifiées :

(i) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$,

(ii) pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}$, la dimension du sous-espace propre associé à λ égale l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_A.

Démonstration 4

Remarques.

1. Si A est diagonalisable alors χ_A est scindé mais la réciproque est fausse (exemple ?)

Exercice 15

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Proposition 4 - Condition suffisante de diagonalisabilité.

Si χ_M est scindé simple alors M est diagonalisable.

Réduction à une forme diagonale par blocs.

V Exercices.

Exercice 16

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x-y, -x+2y)$ pour tous x et y réels.

1. Déterminez χ_f et les valeurs propres de f.
2. Pour chacune des valeurs propres de f, on précisera l'espace propre correspondant (en le décrivant à l'aide d'une base).
3. f est-il diagonalisable ? Si oui, donnez la forme diagonale dans une base adaptée.

Correction exercice 16

1. Déterminons χ_f.

   Puisque l'espace vectoriel est de dimension deux, nous pourrions aisément trouver le polynôme caractéristique en utilisant la trace et le déterminant de la matrice associé

   Si $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Donc son polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} \det\left(XI_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2) - (-1)(-1) \\ &= X^2 - 3X + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(X) = X^2 - 3X + 1.}$$

   Déterminons les valeurs propres de f.

   $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$. Or les racines de χ_f s'obtiennent aisément puisqu'il est de degré deux, donc

$$\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(f) = \left\{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}.}$$

2. Déterminons les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédemment trouvées.

   Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

*
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
équivaut successivement à
$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}x\\\frac{3-\sqrt{5}}{2}y\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x-y=0\\-x+2y-\frac{3-\sqrt{5}}{2}y=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x-y=0\\-x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}y=0\end{cases}$$
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x=y$$
Par conséquent $e_1=\begin{pmatrix}1\\\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{e_1 \text{ est une base de } E_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.}$$

*
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
équivaut successivement à
$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\\\frac{3+\sqrt{5}}{2}y\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x-y=0\\-x+2y-\frac{3+\sqrt{5}}{2}y=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x-y=0\\-x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}y=0\end{cases}$$
$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x=y$$
Par conséquent $\begin{pmatrix}e_2=\begin{matrix}1\\\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{e_2 \text{ est une base de } E_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.}$$

3. Justifions que f est diagonalisable.

Nous pouvons le justifier en disant que χ_f est est scindé simple sur $\mathbb{R}$ donc il est diagonalisable.

La somme des dimensions des sous-espaces propres égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}^2$ donc

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Déterminons une matrice représentative de f qui soit diagonale.

D'après ce qui précède

$$\boxed{\mathrm{M}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 17

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (x,y-2x)$ pour tous x et y réels.

f est-il diagonalisable ? Si oui, donnez la forme diagonale dans une base adaptée.

Correction exercice 17

Démontrons que f est diagonalisable.

Si $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= (X-1)(X-1) - (-2)\times 0 \\ &= X^2 - 2X + 1 \\ &= (X-1)^2 \end{aligned}$$

Donc le trinôme du second degré admet ne racine double réelle : $\alpha_0 = 1$.
Déterminons une base de E_1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à

$$-2x = 0.$$

Donc $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de E_1.

χ_f est scindé mais $\dim_{\mathbb{R}} E_1$ est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_f donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Exercice 18

Pour chacune des matrices suivantes faites les question suivantes.

(a) Déterminez le polynôme caractéristique.

(b) Déterminez les valeurs propres réelles ou éventuellement complexes.

(c) Déterminez des bases des sous-espaces propres.

(d) Déterminez la dimension des sous-espaces propres.

(e) Justifiez que la matrice est diagonalisable ou non.

(f) Donnez la forme diagonale en précisant la matrice de passage.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.
5. $E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. $G = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
8. $H = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction exercice 18

1.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -4 \\ -3 & X+4 & -12 \\ -1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= (X-2)(X+4)(X-5)+(-4)\times(-3)\times 2+(-1)\times(-12)\times 0\\ &\quad -(-1)\times(X+4)\times(-4)-2\times(-12)\times(X-2)-(X-5)\times 0\times(-3)\\ &= X^3-3X^2-18X+40+24-4X-16+24X-48\\ &= X^3-3X^2+2X\\ &= X(X^2-3X+2)\\ &= X(X-2)(X-1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(A)=\{0;1;2\}.}$$

Puisque χ_A est scindé simple

$\boxed{A \text{ est diagonalisable et ses sous-espaces propres ont pour dimension } 1.}$

2. (a)

$$\begin{aligned}\chi_B(X) &= \det(XI_3-B)\\ &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0\\ 0 & X+1 & -1\\ -1 & 0 & X+1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

D'après la règles de Sarrus :

$$\begin{aligned}\chi_B(X) &= (X+1)^3+(-1)^3+0^3-(-1)\times(X+1)\times 0-0\times(-1)\times(X+1)\\ &\quad -0\times(-1)\times(X+1)\\ &= (X+1)^3-1\\ &= X^3+3X^2+3X+1-1\\ &= X^3+3X^2+3X\\ &= X(X^2+3X+3)\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_B(X)=X(X^2+3X+3).}$$

(b) Distinguons les cas réels et complexes.

* X^2+3X+3 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc

$$\boxed{Sp_{\mathbb{R}}(B)=\{0\}.}$$

*

$$\chi_B(X) = X\left(X - \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

donc

$$\boxed{Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{0; \tfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}; \tfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}\}.}$$

(c) *

$$BX = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

Donc $x = z = y$.

$$\boxed{E_0 \text{ admet } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour base.}}$$

*

(d) * Puisque χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).}$$

* Puisque χ_B est scindé simple sur $\mathbb{C}[X]$

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).}$$

3.

Exercice 19

Soient E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme diagonalisable qui ne possède qu'une valeur propre λ.

Montrer que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$.

Exercice 20

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage de l'une à l'autre.
2. On suppose que B est une matrice telle que $B^3 = A$. On pose $F = P^{-1}BP$. Exprimez F^3.
3. Montrez que $FD = DF$.
4. En déduire que F est diagonale.
5. En déduire F et B.

Exercice 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez les éventuelles valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Calculez l'inverse de $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On pose $T = P^{-1}AP$. Exprimez T en fonction de I_2 et de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Montrez que : $T^n = 2^n I_2 + n2^{n-1}J$.
6. Déduisez-en A^n.

Exercice 22

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez le polynôme minimal de A. Déduisez-en A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 23

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f - Id_E) = 1$. On note $H = \ker(f - Id)$.

1. Soit $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et donnez l'allure de la matrice de f dans cette base.

2. Montrer que le polynôme $(X-1)(X-\det(f))$ annule f. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 24

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouvez une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer les dimensions des espaces propres.
3. Donnez le polynôme caractéristique de J.
4. J est-elle diagonalisable ?

Exercice 25

Pour quelles valeurs $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

Exercice 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que les valeurs propres de A sont 1 et 2. Prouvez que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminez X un vecteur propre pour la valeur propre 2, et Y un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. Déterminez Z une matrice colonne telle que : $AZ = Z+Y$.
3. Montrez que (X,Y,Z) forment une base.
   On considère P la matrice dont les colonnes sont X, Y et Z.
4. Soit $T = P^{-1}AP$. Déterminez P. Que peut-on dire de A ?
5. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n.
6. En déduire A^n.

VI Matrices symétriques : théorème spectral.

Il s'agit d'un résultat concernant les matrices symétriques.

VII Matrices symétriques positives : diagonalisation simultanée.