Forme bilinéaire.

Le terme « forme » désigne les applications à valeurs dans le corps des scalaires. Question : les formes bilinéaires sur des corps non commutatifs.

I Définition.

Forme bilinéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Nous appellerons forme bilinéaire sur $E \times F$ toute application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall (x_1,x_2,y_1,y_2,\lambda) \in E^2 \times F^2 \times \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\lambda x_1 + x_2,y_1) = \lambda\varphi(x_1,y_1) + \varphi(x_2,y_1) \\ \varphi(x_1,\lambda y_1 + y_2) = \varphi(x_1,y_1) + \lambda\varphi(x_1,y_2) \end{array} \right.$$

Orthogonalité pour une forme bilinéaire.

Deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux pour la forme bilinéaire φ si et seulement si $\varphi(x,y) = 0$.

Soit $X \subset E$ une famille de vecteurs. L'othogonal à droite de X pour φ, $X^\perp = \{y \in F | \forall x \in X,\ \varphi(x,y) = 0\}$, est un sous-espace vectoriel de F.

Soit $Y \subset F$ une famille de vecteurs. L'othogonal à gauche de Y pour φ, $Y^\perp = \{x \in E | \forall y \in Y,\ \varphi(x,y) = 0\}$, est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier $E^\perp$ est appelé le noyau à droite de φ et $F^\perp$ le noyau à gauche de φ.

Une forme bilinéaire est dite non dégénérée à gauche si son noyau à gauche est réduit au vecteur nul, i.e. si $\forall x \in E,\ (\forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0$. Nous définissons de même non dégénérée à droite et non dégénérée (à doite et à gauche).

Dimension finie : représentation matricielle des formes bilinéaires.

II Forme symplectique.

Une forme symplectique sur un espace vectoriel E est une forme bilinéaire φ sur $E \times E$ telle que

(i) φ est antisymétrique,

(ii) φ est non-dgénérée.

III Forme bilinéaire sur $E \times E$.

Vocabulaire.

Une forme bilinéaire φ sur $E \times E$ est dite

1. symétrique si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
2. antisymétrique si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = -\varphi(x,y)$.
3. alternée si et seulement si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0$.
4. définie si et seulement si elle n'a pas de vecteur isotrope non nul : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
5. réflexive si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y,x) = 0$.
6. positive, si le corps K est totalement ordonné, si et seulement si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x)\ ge0$.

Forme quadratique.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. À φ est associée la forme quadratique ϕ définie par $\forall x \in E,\ \phi(x) = \varphi(x,x)$.

Réciproquement à toute forme quadratique ϕ sur E est associée une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, φ, définie par : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[\phi(x+y) - \phi(x-y)\right]$. φ est alors appelée la forme polaire de ϕ.

IV Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Cas général.

Cas des formes bilinéaires symétriques.

Voir les résultats sur l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Définition 1

Soient

. E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n,

. φ une forme bilinéaire sur $E \times E$,

. $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Nous appellerons *matrice représentative de φ dans $\mathscr{B}$* la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \left(\varphi(e_i,e_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant j}.$$

Proposition 1

Soient

. E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n,

. φ une forme bilinéaire sur $E \times E$,

. $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

φ est symétrique si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.