Matrices d'applications linéaires.

I Généralités.

Définition.

Définition 1

Soient

. E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n,

. $\mathscr{B}_d = (d_1, \ldots, d_p)$ une base de E,

. $\mathscr{B}_a = (a_1, \ldots, a_n)$ une base de F,

. $f \in \mathscr{L}(E,F)$,

. pour chaque $j \in [\![1,p]\!]$ notons $f(d_j) = m_{1,j}a_1 + \ldots m_{n,j}a_n$.

Nous appellerons *matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_d$ et $\mathscr{B}_a$*, et nous noterons $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_d,\mathscr{B}_a}(f)$, la matrice $(m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.

Remarques.

1. Ainsi $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_d,\mathscr{B}_a}(f)$ est formée de vecteurs colonnes qui sont les coordonnées dans la base d'arrivée des images par f des vecteurs de la base de départ. Sans formalisme nous pourrions écrire : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_d,\mathscr{B}_a}(f) = \begin{pmatrix} f(d_1) & f(d_2) & \ldots & f(d_p) \end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_d,\mathscr{B}_a}(f) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemples.

1.

II Matrices et changement de bases.

Matrices de passage.

Définition 2

Soient

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n,

. $\mathscr{B}_d = (d_1, \ldots, d_n)$ et $\mathscr{B}_a = (a_1, \ldots, a_n)$ deux bases de E.

Nous appellerons *matrice de passage de $\mathscr{B}_d$ à $\mathscr{B}_a$*, et nous noterons $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_d}^{\mathscr{B}_a}$, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_a,\mathscr{B}_d}(\mathrm{Id}_E)$.

Remarques.

1. $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_d}^{\mathscr{B}_a}$ est obtenue en indiquant dans les colonnes les coordonnées des vecteurs de la base d'arrivée exprimées dans la base de départ.
2. La matrice de passage exprime les vecteurs de la base d'arrivée en fonction de la base de départ. Elle correspond à l'idée intuitive que nous nous faisons de ce changement de base : comment exprimé ce qu'on obtient en fonction de ce dont est parti.
3. Ainsi les matrices de passage sont un cas particulier de matrice d'application linéaire. Et même plus spécifiquement des endomorphismes. Ainsi les résultats concernant les matrices d'endomorphismes sont donc valables pour les matrices de passage.

Exemples.

1. Notons $\mathscr{B}_d = (d_1,d_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathscr{B}_a = (a_1,a_2)$ avec $a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $a_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $a_2 = -1e_1 + 1e_2$, $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_d}^{\mathscr{B}_a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2.

Exercice 1.

Soient $\mathscr{B}_1 = (1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, a et b des réels distincts.

1. Démontrez que
$$\mathscr{B}_2 = \left(1,X-a,(X-a)^2\right)$$
et
$$\mathscr{B}_3 = \left((X-a)^2,(X-a)(X-b),(X-b)^2\right)$$
sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminez $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_3}$

Correction exercice 1

1. * $\mathscr{B}_2$ est une famille de polynômes échelonnés en degrés donc elle est $\mathbb{R}-$libre. Comme de plus elle est formée de 3 éléments et que $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

$$\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

   * Notons $P_1(X) = X^2 - 2aX + a^2$, $P_2(X) = X^2 - (a+b)X + ab$ et $P_3(X) = X^2 - 2bX + b^2$. Puis considérons

$$
\begin{aligned}
Q_1(X) &= 2P_2(X) - P_1(X) - P_3(X) \\
&= 2ab - a^2 - b^2 \\
Q_2(X) &= P_1(X) - P_2(X) \\
&= (b-a)X + a^2 - ab \\
Q_3(X) &= P_3(X)
\end{aligned}
$$

Par construction Q_1, Q_2 et Q_3 sont dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1,P_2,P_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Or (Q_1,Q_2,Q_3) est une famille de polynômes échelonnés en degrés (car $a \neq b$) donc est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et comme $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1,P_2,P_3) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1,P_2,P_3) \subset \mathbb{R}_2[X]$ nous en déduisons que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_1,P_2,P_3) = \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi (P_1,P_2,P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme c'est une famille de trois vecteurs génératrice d'un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

$$\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

2. En utilisant les formes développées des polynômes : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_3} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ -2a & -(a+b) & -2b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vecteur et changement de base.

Propriétés des matrices de passage.

Proposition 1

Soient

. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n,

. $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ des bases de E.

(i) $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_3} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\mathrm{P}_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_3}$.

Exercice 2.

Démontrez que toute matrice inversible est une matrice de passage.

Matrices d'application linéaire dans différentes bases.

Matrices équivalentes.

Matrices semblables.

Définition 3

Remarques.

1. La notion de matrices semblables n'a de sens que pour des matrices carrées et n'est donc associée qu'à des endomorphismes.
2. Des matrices semblables sont en particulier équivalentes mais la réciproque est trivialement fausse.