Endomorphismes symétriques d'un espace préhilbertien réel.

Rappelons qu'un espace vectoriel préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Les espaces euclidiens sont des espaces préhilbertien de dimension finie.

I Généralités.

Définition 1

Soient $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien réel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Nous dirons que f est *symétrique* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < f(x),y >=< xf(y) > .$$

Remarques.

1. Nous noterons $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de l'espace préhilbertien E.

Proposition 1

$(\mathscr{S}(E), + \cdot)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E.

II Matrice d'un endomorphisme symétrique sur un espace euclidien.

Proposition 2

Soient $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ un base orthonormée de E.

$$f \in \mathscr{S}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration 1

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < f(x),y >=< x,f(y) > .$$

équivaut successivement à

$$\forall (X,Y) \in \mathrm{M}_{n,1}^2,\ {}^t(AX)Y = {}^tX(AY)$$
$$\forall (X,Y) \in \mathrm{M}_{n,1}^2,\ {}^t(AX)Y = {}^t({}^tAX)Y$$
$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1},\ \forall Y \in \mathrm{M}_{n,1},\ {}^t\big[(A - {}^tA)X\big]\,Y = 0$$
$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1},\ {}^t\big[(A - {}^tA)X\big] = 0$$
$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1},\ (A - {}^tA)X = 0$$
$$A - {}^tA = 0$$
$$A = {}^tA$$
$$A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$$

III Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique dans un espace euclidien.

Récupérer et adapter les résultats sur les matrices symétriques.
Aussi : https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/re/node3.html